

Dopasowanie anteny do linii przesyłowej oraz do nadajnika przysparza nieraz krótkofalowcom sporo kłopotów. Anteny są wykonane najczęściej według recepty specjalistów, ale sprawdzenie ich dopasowania pozostaje sprawą otwartą. Za pomocą szablonu wykresu Smitha i kilku prostych narzędzi pomocniczych można, metodą graficzną, dokonać optymalizacji dopasowania linii przesyłowej do anteny, jak również wzajemnego dopasowania innych podzespółów elektronicznych w szerokim zakresie częstotliwości.

W celu obliczenia parametrów zjawisk występujących na liniach przesyłowych wielkiej częstotliwości, takich, jak: współczynnik fali stojącej, impedancje, napięcia i prądy tam występujące, trzeba się posłużyć metodami matematycznymi. Dlatego wielu amatorów radzi sobie z zagadnieniami dopasowania w taki sposób, że skracając np. kawałek po kawałku kabel współosiowy metodą kolejnych prób dochodzi drogą empiryczną do wyznaczonego celu (ang. „cut and try”). Jest to metoda zbyt pracochłonna i nadaje się tylko do prostych zagadnień. Można także stosować metodę „książki kucharskiej”, wykonując zadanie wg podanej przez autora recepty, ale i wtedy mogą wystąpić trudności, gdyż autor podaje zwykle receptę uogólnioną, która nie uwzględnia wpływu warunków ubocznych na wynik końcowy.

Metodą optymalną, jaką powinien się posłużyć amator-krótkofalowiec, jest metoda graficzna wymagająca jedynie podstawowej znajomości matematyki, a udowoczniająca zarazem wzajemne powiązania wielkości występujących w rozpatrywanym zagadnieniu.

W technice antenowej, a także w innych zagadnieniach, szerokie zastosowanie znalazł kołowy wykres Smitha. Wykres ten został opracowany i opublikowany w 1939 r. przez P.H. Smitha w USA. Wykres Smitha przedstawiono na III stronie okładki niniejszego numeru. Chcąc się nim posłużyć, należy krótko przypomnieć podstawy rachunku na liczbach zespolonych i sposób przedstawienia wielkości przemienoprądowych.

Matematyczna postać sinusoidalnego przebiegu harmonicznego przedstawia się następująco:

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

przy czym:

$u(t)$ — wartość chwilowa,

$\hat{U}$ — amplituda, czyli wartość szczytowa,

ω — prędkość kątowna,

φ — faza początkowa,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Jeżeli prądy i napięcia w układzie przebiegają ściśle sinusoidalnie można za pomocą rachunku zespolonego dokonać dość prostego obliczenia, w którym prądy i napięcia są przedstawione jako liczby zespolone.

Równanie $x^2 + 1 = 0$ nie jest do rozwiązania w zakresie liczb rzeczywistych. Liczba zespolona, będąca bardziej ogólną postacią liczby, składa się z sumy lub różnicy liczby rzeczywistej a oraz liczby urojonej j . Sposób liczenia nie odbiega od sposobu konwencjonalnego, musimy jednak pamiętać, że:

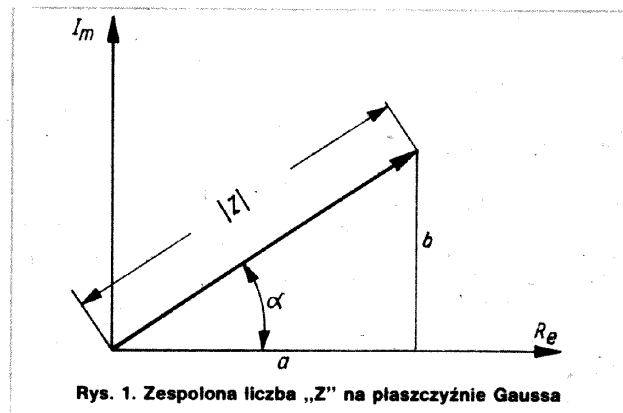
$$+j = \sqrt{-1} \text{ i oznacza obrót o } 90^\circ$$

$$(+j) \cdot (+j) = -1 \text{ i oznacza obrót o } 180^\circ$$

$$(-1) \cdot (+j) = -j \text{ i oznacza obrót o } 270^\circ$$

$$(-j) \cdot (+j) = 1 \text{ i oznacza obrót o } 360^\circ \text{ lub } 0^\circ$$

Do graficznego przedstawienia wielkości zespolonych musimy się posłużyć płaszczyzną Gaussa, gdzie na osi poziomej Re odcinamy dodatnie i ujemne wartości liczb rzeczywistych, natomiast na osi pionowej Im — dodatnie i ujemne wartości liczb urojonych (rys. 1).



Rys. 1. Zespolona liczba „Z” na płaszczyźnie Gaussa

Z twierdzenia Pitagorasa można obliczyć, że wartość bezwzględna

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3)$$

zaś

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \text{ lub } \alpha = \arctg \frac{b}{a} \quad (4)$$

Dla przypomnienia przytacza się kilka przykładów liczb zespolonych (rys. 2).

$$\hat{Z}_1 = 1 + j3; |Z_1| = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,16, \quad \alpha_1 = 71,6^\circ$$

$$\hat{Z}_2 = -3 - j4; |Z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \alpha_2 = 233,1^\circ$$

$$\hat{Z}_3 = 5 - j2; |Z_3| = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5,39, \quad \alpha_3 = 338,2^\circ$$

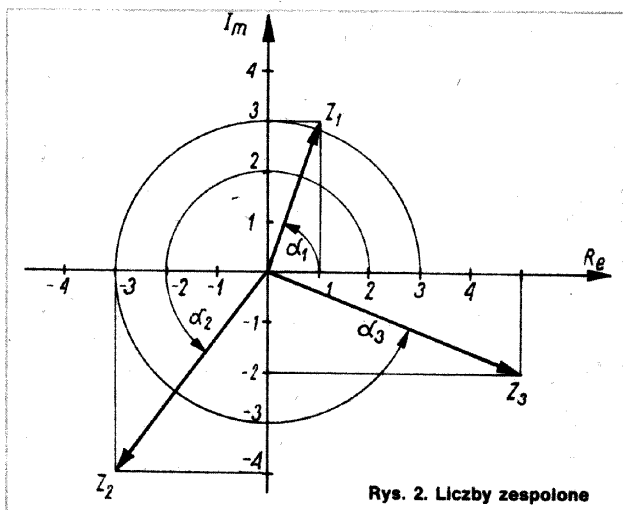
$\hat{Z} = a + jb$ można przedstawić także w postaci trygonometrycznej:

$$\hat{Z} = |Z| \cdot (\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad (5)$$

lub w postaci wykładniczej:

$$\hat{Z} = |Z| \cdot e^{j\alpha} \quad (6)$$

Cd. na str. 18



Rys. 2. Liczby zespolone

ponieważ

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \sin\alpha \quad (7)$$

czyli

$$a = |Z| \cdot \cos\alpha, \quad b = |Z| \cdot \sin\alpha \quad (8)$$

Dwie liczby zespolone są sobie równe, jeżeli:

1) części rzeczywiste i części urojone są sobie równe, lub

2) wartości bezwzględne i kąty fazowe są sobie równe.

Dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych odbywa się w taki sposób, że oddzielnie dodajemy (odejmujemy) części rzeczywiste i urojone:

$$\hat{Z}_1 = 3 + j5, \quad \hat{Z}_2 = 2 - j3, \quad \hat{Z}_3 = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = 5 + j2.$$

Mnożenie (dzielenie) liczb zespolonych odbywa się w taki sposób, że mnożymy (dzielimy) wartości bezwzględne i dodajemy (odejmujemy) kąty fazowe. Tu pomocne jest przekształcanie liczb na postać wykładniczą:

$$\hat{Z}_1 = 3 + j5 = \sqrt{3^2 + 5^2} \cdot e^{j \arctg \frac{5}{3}} = 5,83 \cdot e^{j 59}$$

$$\hat{Z}_2 = 2 + j7 = \sqrt{2^2 + 7^2} \cdot e^{j \arctg \frac{7}{2}} = 7,28 \cdot e^{j 74}$$

$$\hat{Z}_3 = \hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 = 5,83 \cdot 7,28 \cdot e^{j(59 + 74)}$$

$$\hat{Z}_3 = 42,44 \cdot e^{j 133} = -29 + j31$$

Potęgowanie (pierwiastkowanie) liczb zespolonych odbywa się w taki sposób, że potęgujemy (pierwiastkujemy) wartość bezwzględną wykładnikiem potęgowym (pierwiastkowym) n , zaś kąt fazowy mnożymy (dzielimy) przez wykładnik n :

$$(\hat{Z})^n = |Z|^n \cdot e^{jn\varphi} \quad (9)$$

Sinusoidalna wielkość przemienne w postaci zespolonej ma postać:

$$\hat{u} = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}, \text{ czyli } \hat{u} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \quad (10)$$

Składnik $\hat{U} \cdot e^{j\varphi}$ oznacza wielkość zespolonej amplitudy o długości wektora $\hat{U}$, który z osią rzeczywistą tworzy kąt φ ; drugi składnik $e^{j\omega t}$ ma długość wektora „1” i powoduje obroty pierwszego wektora w kierunku matematycznie dodatnim, czyli odwrotnie do ruchu wskazówek zegara z prędkością kątową ω .

Mamy więc wektor $\hat{U}$, który z prędkością kątową ω krąży wokół „0” (początku układu współrzędnych) i w czasie $t = 0$ wykazuje fazę początkową φ .

Rzutuując wektor $\hat{U}$ na oś urojoną układu współrzędnych, jak to

wynika z (10), otrzymujemy, że $f = \frac{1}{T}$. Dla uproszczenia

rachunku można w tym wypadku pominąć wielkość $e^{j\omega t}$, pozorując nieruchome położenie wektora $\hat{U}$.

Zespolony rezystor, zwany także impedancją, można zdefiniować następująco:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}}{\hat{I} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t}}$$

po podzieleniu licznika i mianownika przez $e^{j\omega t}$, zespolony rezystor staje się nieruchomym wektorem:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = |Z| \cdot e^{j\varphi} = R + jX$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}$$

Jak wiadomo, w indukcyjności napięcie wyprzedza prąd o 90° , w pojemności prąd wyprzedza napięcie o 90° ,

R — składowa rzeczywista, rezystancja,

X — składowa urojona, reaktancja.

W obliczeniach obwodów przemiennoprądowych można stosować wszystkie równania podstawowe dla obwodów stałoprądowych w zapisie zespolonym, gdzie w miejsce rezystorów wstawiamy rezystory zespolone (impedancje).

Przykład (rys. 3):

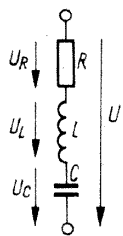
$$\hat{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{j \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}$$

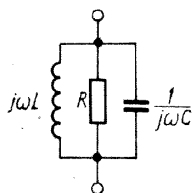
$$\text{Wartość bezwzględna } |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Dla częstotliwości rezonansowej $\omega_{(rez)} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\hat{Z}$ staje się najmniejsze i równa się R .

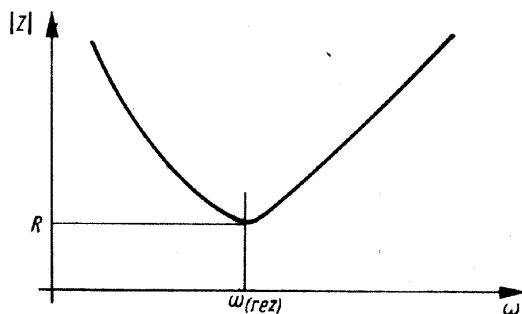
Kąt fazowy poniżej $\omega_{(rez)}$ jest ujemny (charakter pojemnościowy, zaś powyżej $\omega_{(rez)}$ — dodatni (charakter indukcyjny). Na rys. 4 przedstawiono oddzielnie $|Z|$ (impedancję) oraz kąt fazowy φ obwodu RLC. Wielkości te można przedstawić na wspólnym wykresie. Będzie to miejsce geometryczne grota wektora na płaszczyźnie Gaussa, przy zmianie parametru, np. częstotliwości (rys. 5).



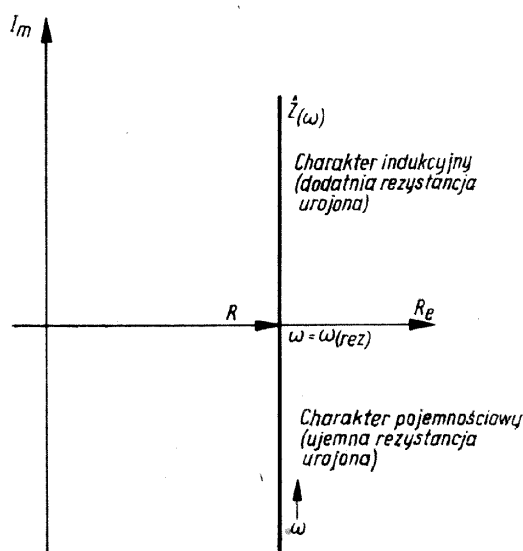
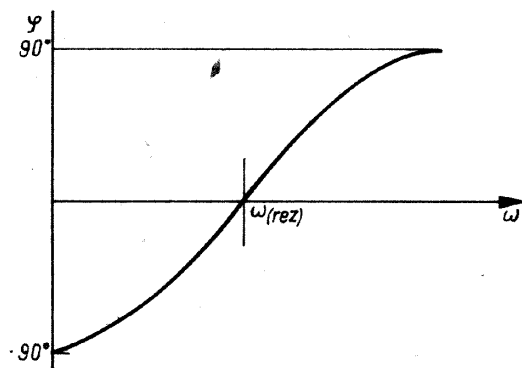
Rys. 3. Szeregowy obwód rezonansowy



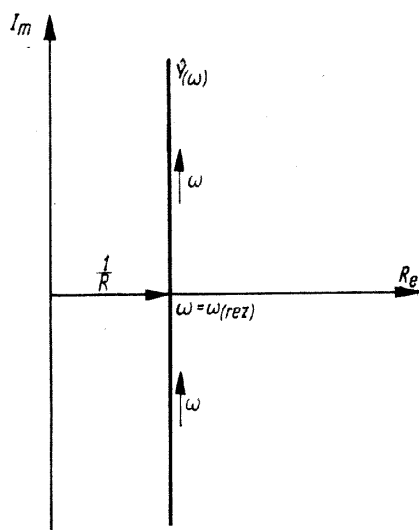
Rys. 6. Równoległy obwód rezonansowy



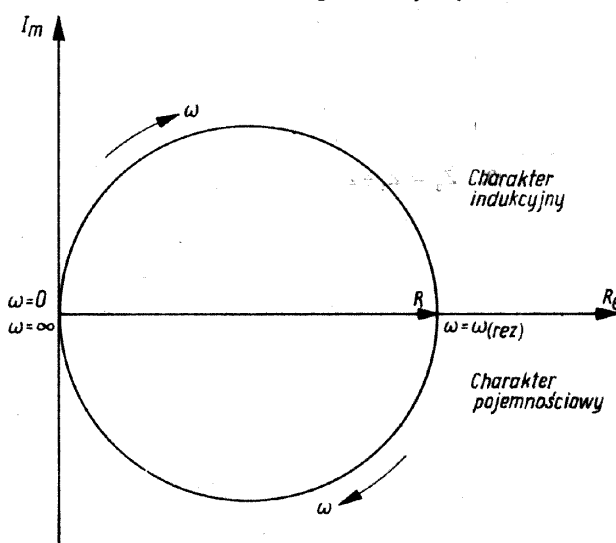
Rys. 4. Wartość bezwzględna $|Z|$ i faza szeregowego obwodu rezonansowego



Rys. 5. Impedancja szeregowego obwodu rezonansowego w funkcji częstotliwości



Rys. 7. Admitancja równoległego obwodu rezonansowego w funkcji częstotliwości



Rys. 8. Impedancja równoległego obwodu rezonansowego

Rozpatrując przykład równoległego obwodu rezonansowego (rys. 6) należy ustalić zespoloną przewodność układu, czyli jego admitancję (rys. 7):

$$\hat{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

Miejsce geometryczne zespolonej rezystancji obwodu równoległego (rys. 8) uzyskujemy drogą inwersji, czyli odwzorowania, wg zasady:

$$\hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}}$$

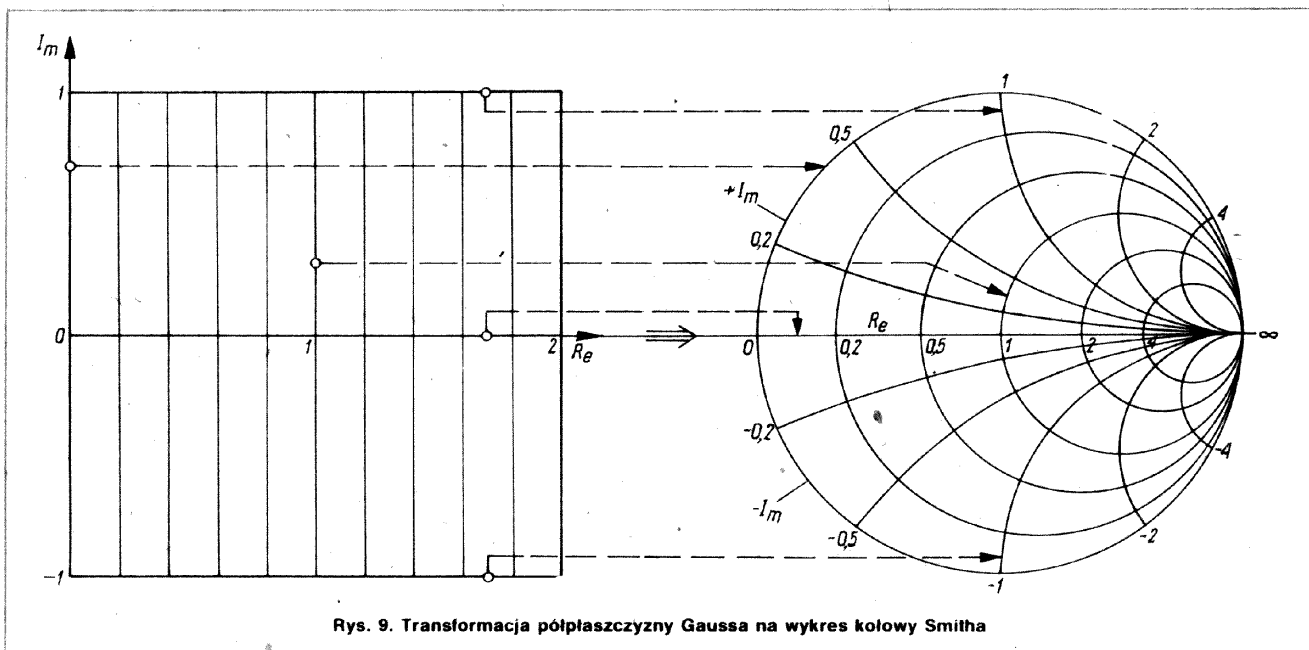
Prawa inwersji głoszą:

- 1) prosta przechodząca przez „0” punktu układu współrzędnych, po inwersji jest znowu prostą przechodzącą przez „0” punktu układu współrzędnych;
- 2) prosta nie przechodząca przez „0” punktu układu współrzędnych, po inwersji jest okręgiem przechodzącym przez „0” punktu układu współrzędnych.

Przykład równoległego obwodu rezonansowego z rys. 6 podlega drugiemu prawu inwersji, gdyż prosta od $\omega = „0”$ do $\omega = \omega(\text{rez})$ biegnie po górnym obwodzie okręgu, zaś od $\omega = \omega(\text{rez})$ do $\omega = \infty$ po dolnym obwodzie okręgu.

Kołowy wykres Smitha jest narzędziem pracy zarówno elektronika-profesjonalisty jak i amatora. W pracach naukowo-badawczych stosuje się analizatory układów sieciowych, opierające się na kołowym wykresie Smitha, gdzie na okrągłym ekranie można zobaczyć wykres impedancji badanego urządzenia w szerokim zakresie częstotliwości. Do celów amatorskich wystarczą: szablon wykresu Smitha, cyrkiel, ołówek i linijka. Dane wyjściowe, np. impedancję wejściową anteny, jej składową rzeczywistą i urojoną można uzyskać pomiarowo za pomocą względnie prostych mostków w.c.z., wykonanych amatorsko.

Aby w pełni wykorzystać możliwości, jakie daje wykres kołowy Smitha, wymagana jest dobra znajomość sposobu posługi-



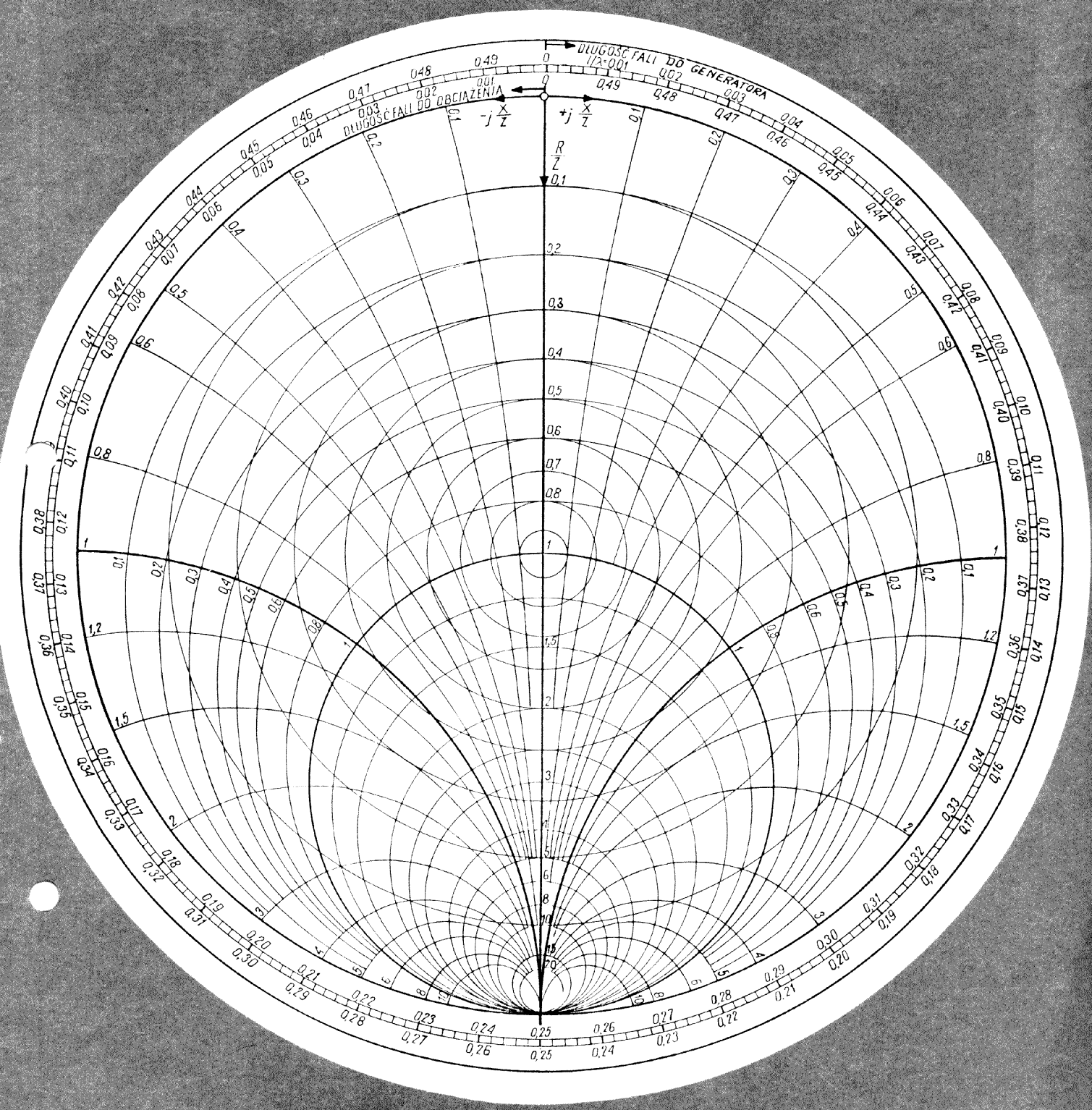
Rys. 9. Transformacja półpłaszczyzny Gaussa na wykres kołowy Smitha

wania się nim, a także pewne doświadczenie. Nie można nawet na setkach stron instrukcji użytkownika spisać wszystkiego, co da się obliczyć, posługując się tym wykresem. Trzeba nabierać wprawy, najpierw na prostych przykładach, z czasem rozwiązując zadania trudniejsze, szczególnie z dziedziny dopasowania anten, ale i z innych dziedzin.

Gaussowski układ współrzędnych wymaga powierzchni o nieograniczonych wymiarach, na której krzyżują się pionowa oś wielkości urojonych z poziomą osią wielkości rzeczywistych. Wskutek liniowego podziału osi na wykresie można zmieścić jedynie ograniczony zakres wielkości liczbowych. Wielką zaletą układu jest to, że oprócz możliwości naniesienia na nim wielkości rzeczywistych i urojonych, można także odczytać wartości bezwzględne impedancji, jak i kąt fazowy impedancji w stosunku do osi wielkości rzeczywistych.

Aby zakres liczbowy układu współrzędnych rozszerzyć do ∞ , wprowadzono odwzorowaną (inwertowaną) postać wykresu.

Wykorzystuje się jedynie prawą połowę wykresu, tj. poczynając od osi wielkości urojonych, na prawo wzdłuż osi dodatnich wielkości rzeczywistych. Osie wielkości urojonych związa się w półokręgi, przy czym oś $+jX$ tworzy górną połowę koła, a także pole $+jX$, zaś oś $-jX$ dolną połowę koła, czyli pole $-jX$. Dodatnia oś rzeczywista tworzy poziomą średnicę tego koła, a jej liniowa podziałka zostaje zastąpiona podziałką nieliniową. Siatka podziału układu współrzędnych w obu wypadkach pozostaje niezmieniona, tzn., że osie „Im” i „Re” urojona i rzeczywista w punktach skrzyżowań są do siebie prostopadłe. Nieliniowa skala podziału obejmuje zakres liczb od 0 do ∞ . Brak jest możliwości przedstawienia ujemnych rezystancji rzeczywistych oraz ich odwrotności. Na kołowym wykresie Smitha zilustrować można wszystkie impedancje i admitancje, od najmniejszych do największych. Transformację półpłaszczyzny Gaussa na wykres kołowy Smitha przedstawiono na rys. 9. (Cd. artykułu w nr 5/89)



Kołowy wykres Smitha (2)

Podobnie jak w Gaussowskim układzie współrzędnych, również w układzie Smitha każdy punkt płaszczyzny oznacza zespolony rezystor, wg jego wartości rzeczywistej i urojonej. Wartości rzeczywiste nanosimy na osi poziomej (średnicy układu), dodatnie wartości urojone na górnej połowie obwodu układu, ujemne wartości urojone na dolnej połowie obwodu kołowego układu Smitha. Impedancje znajdujemy na przecięciu krzywych rzeczywistych i urojonych. W górnej połowie układu mieszczą się impedancje lub admitancje o dodatniej, a w dolnej połowie o ujemnej składowej urojonej.

Na wykresie można nanieść wartości rzeczywiste i urojone w granicach od 0 do ∞ . Odczytanie z wykresu dużych wartości staje się niedokładne. Dlatego przyjęto się wielkości wejściowe „normować” w stosunku do pewnych wielkości odniesienia, przeważnie tak, aby wielkość odniesienia „Ro” mieściła się w punkcie środka układu, tzn. w punkcie „1”. W części środkowej układu Smitha odczytywanie danych wynikowych jest najdokładniejsze. Jeżeli w obliczeniach występuje kilka zróżnicowanych wielkości rzeczywistych i urojonych, należy wszystkie normować w stosunku do tej samej wielkości odniesienia.

Na wykresie z rys. 10 naniesiono kilka impedancji i admitancji:

$$\begin{array}{ll} Z_1 = (140 + j240)\Omega, & R_o = 200\Omega, & Z'_1 = 0,7 + j1,2; \\ Z_2 = (200 - j800)\Omega, & R_o = 500\Omega, & Z'_2 = 0,4 - j1,6; \\ Y_1 = (110 + j140)\text{mS}, & Y_o = 200\text{mS}, & Y'_1 = 0,55 + j0,7; \\ Y_2 = (2 - j3)\mu\text{S}, & Y_o = 2\mu\text{S}, & Y'_2 = 1,0 - j1,5; \end{array}$$

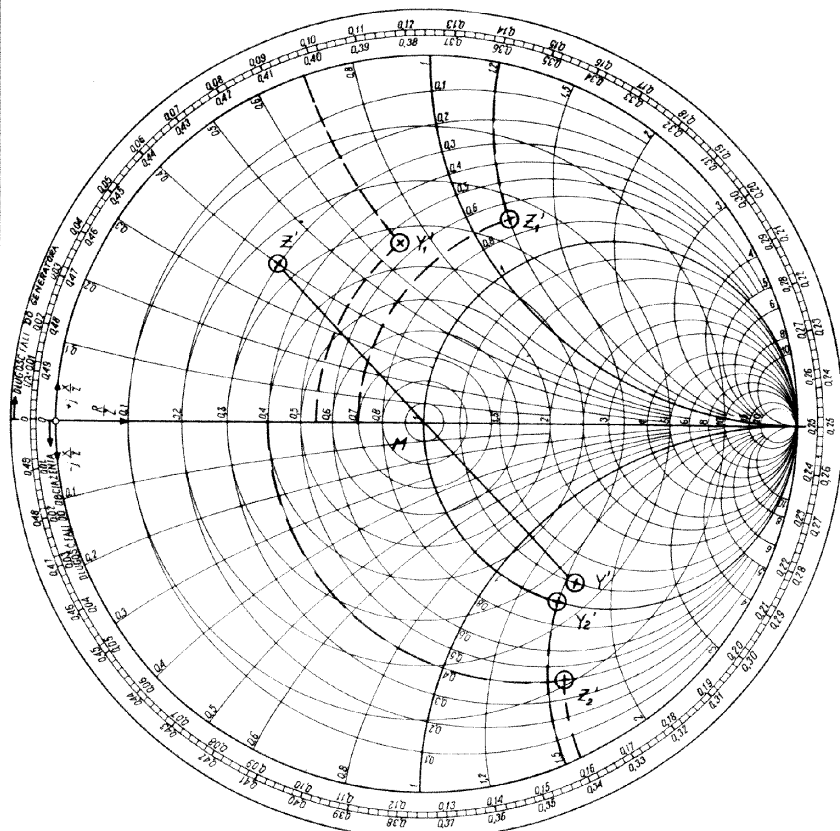
Obliczając układy zespolone zachodzi nieraz konieczność zamiany układu szeregowego na odpowiedni układ równoległy lub odwrotnie. Matematycznie występuje tu następująca zależność podana na rys. 11.

Na wykresie kołowym Smitha zamianę taką wprowadzamy graficznie. W tym celu należy poprowadzić prostą z punktu Z przez środek układu M, przedłużając prostą w kierunku punktu lustrzanie położonego do punktu Z. Odcinając cyrklem odległość Z-M w przeciwnym kierunku, uzyskujemy punkt Y, będący admitancją, odpowiadającą impedancji Z. Należy pamiętać, że potrzebną do odnormowania przewodność Go musimy uzyskać ze stosunku:

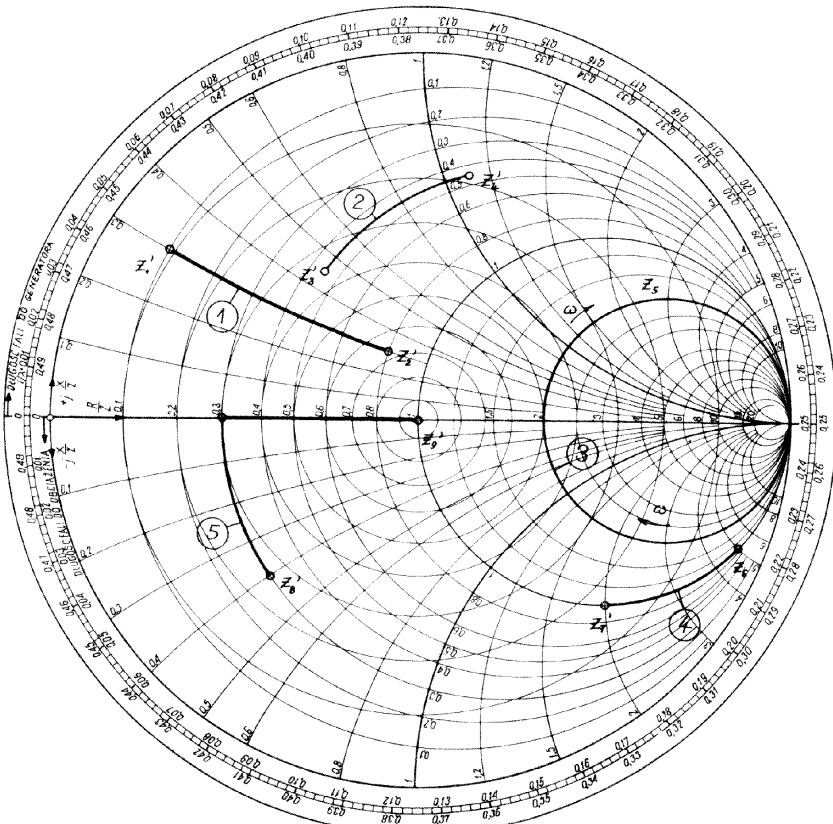
$$G_o = \frac{1}{R_o}$$

Przykład 1. Impedancję szeregową $Z = 30 + j40$ należy zamienić na równoważny układ równoległy. R_o obieramy 100Ω , czyli $Z' = 0,3 + j0,4$. Uwzględniając wcześniejsze wywody, odnośnie zamiany impedancji na admitancję, odczytujemy na wykresie kołowym $Y' = 1,2 - j1,6$, przy założeniu, że normowana przewodność $G_o = \frac{1}{R_o} = \frac{1}{100\Omega} = 10\text{mS}$. $Y = G_o \cdot Y' = (12 - j16)\text{mS}$ (rys. 10).

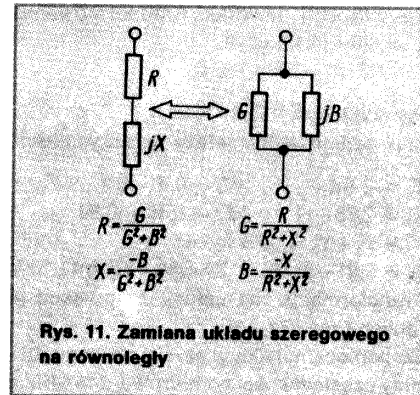
Łączenie szeregowo Z i R . Tę czynność przeprowadza się w taki sposób, że punkt Z na wykresie kołowym przesuwamy się po linii stałej wielkości urojonej w kierunku okręgu większych wartości rzeczywistych. W wypadku dołączenia do Z wielkości urojonych posuwamy się po okręgu stałej wielkości rzeczywistej, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, gdy dołączamy indukcyjność, czyli dodatnią wielkość urojoną, natomiast w kierunku przeciwnym z ruchem wskazówek zegara, gdy dołączamy pojemność, tj. ujemną wielkość urojoną. W podobny sposób można wyjaśnić wpływ częstotliwości na położenie punktu Z.



Rys. 10. Sposób nanoszenia impedancji i admitancji oraz inwersja na wykresie kołowym Smitha



Rys. 12. Łączenie szeregowe rezystancji zespolonych



Rys. 11. Zamiana układu szeregowego na równoległy

Przykłady (rys. 12)

- 1) $Z_1 = (10 + j30)\Omega$, $R_0 = 100\Omega$
 $Z'_1 = 0,1 + j0,3$

Dołączając szeregowo rezystor 70Ω punkt Z'_1 przesuwamy się do Z'_2
 $Z'_2 = 0,8 + j0,3$,
 czyli $Z_2 = (10 + 70)\Omega + j30\Omega$

- 2) $Z_3 = (45 + j45)\Omega$, $R_0 = 100\Omega$,
 $Z'_3 = 0,45 + j0,45$

Dołączając szeregowo indukcyjność $j65\Omega$ punkt Z'_3 przesuwamy się do Z'_4

$Z'_4 = 0,45 + j1,1$,
 czyli $Z_4 = (45 + j110)\Omega$

- 3) Miejsce geometryczne $Z_{(w)}$ szeregowego układu rezonansowego

$$Z_s = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

$$R_0 = \frac{R}{2} \quad 0 \leq \omega < \infty$$

- 4) $Z_6 = 1\text{ k}\Omega - j5\text{ k}\Omega$, $R_0 = 1\text{ k}\Omega$,
 $Z'_6 = 1 - j5$

Dołączając indukcyjność $j3\text{ k}\Omega$
 $Z'_7 = 1 - j2$, czyli $Z_7 = 1\text{ k}\Omega - j2\text{ k}\Omega$

- 5) $Z_8 = (30 - j40)\Omega$, $R_0 = 100\Omega$,
 $Z'_8 = 0,3 - j0,4$

Dołączając szeregowo impedancję $(70 + j40)\Omega$ otrzymujemy
 $Z'_9 = 1 + j0$ $Z_9 = 100\Omega$

Łączenie równoległe dwóch impedancji (rys. 13, 14). Zadanie to realizujemy, zamieniając obie impedancje na odpowiadające im admittance. Po zsumowaniu obydwu admittance dokonujemy zwrotnej inwersji uzyskując wynikową impedancję.

Obieramy: $R_0 = 100\Omega$,

czyli $Z'_1 = 1,2 + j1,6$

Po pierwszej inwersji odczytujemy admittance $Y'_1 = 0,3 - j0,4$. Admittance Y_2 ,

$$\text{czyli } Y'_2 = \frac{R_0}{R_2} = \frac{100}{80} = 1,25.$$

Wartość Y'_2 można uzyskać także za pomocą graficznej inwersji.

Po zsumowaniu

$$Y' = Y'_1 + Y'_2 = 0,3 - j0,4 + 1,25 = 1,55 - j0,4.$$

Po zwrotnej inwersji i odnormowaniu

$Z' = 0,6 + j0,15$, czyli

$Z = R_o \cdot Z' = (60 + j15) \Omega$.

Przykład (rys. 15, 16)

Impedancje, które należy połączyć równolegle:

$Z'_1 = 2 + j1$ $Y'_1 = 0,4 - j0,2$

$Z'_2 = 0,75 - j1$ $Y'_2 = 0,48 + j0,64$

$Y' = Y'_1 + Y'_2 = 0,88 + j0,44$

$Z' = 0,91 - j0,45$, $Z = (36,4 + j18) \Omega$.

Transformacja rezystancji za pomocą dwóch wielkości urojonych (rys. 17)

Za pomocą mostka w.cz. pomierzono antenę. Stwierdzono, że przy częstotliwości pomiarowej 145 MHz antena zachowuje się jak szeregowe połączenie rezystora 60Ω oraz kondensatora 7 pF . Należy, poprzez równoległe podłączenie indukcyjności, a następnie szeregowe połączenie pojemności dopasować tę antenę do 240Ω symetrycznej linii zasilającej.

Jako R_o obieramy 240Ω , a wynikające stąd G_o jest równe $4,17 \text{ mS}$.

$$Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C} = (60 - j156) \Omega, \quad Z'_1 = 0,25 - j0,65.$$

Ponieważ należy podłączyć równoległą indukcyjność, musimy Z'_1 inwertować do Y'_1 . Za pomocą jeszcze niewiadomej indukcyjności należy punkt Y'_1 przesunąć po okręgu jednakowych przewodności rzeczywistych do punktu Y'_2 . W wyniku zwrotnej inwersji Y'_2 otrzymujemy Z'_2 , który musi się znaleźć na okręgu przechodzącym przez punkt Z'_1 i punkt „O” (okrąg kreskowany).

Punkt Z'_2 mieści się już na docelowym okręgu rezystancji rzeczywistych „1”, wystarczy teraz szeregowo połączyć kondensator, aby Z'_2 sprowadzić do środka wykresu kołowego Smitha.

Ustalenie wartości L_p i C_s

Aby przesunąć punkt Y'_1 do punktu Y'_2 , potrzebna była wartość $B'_p = -j1,8$:

$$B_p = G_o \cdot B'_p = \frac{1}{j\omega L} = 7,5 \text{ mS} = 133 \Omega, \text{ czyli } L = 146 \text{ nH}.$$

Aby przesunąć punkt Z'_2 do „1” (środek wykresu kołowego) potrzebna jest ujemna reaktancja $X'_s = -j1$:

$$X_s = R_o \cdot X'_s = \frac{1}{j\omega C}, \quad \text{skąd } C = 4,6 \text{ pF}.$$

Przytoczony przykład dopasowania anteny do symetrycznej linii 240Ω (rys. 18) należy uważać jako jedno z wielu możliwych rozwiązań.

Za pomocą wykresu kołowego Smitha można również rozwiązywać zadania z dziedziny linii przesyłowych w.cz.

Jeżeli linia przesyłowa nie jest obciążona rezystancją równą jej rezystancji falowej, występują na niej obok fali bieżącej także fala odbita.

Zespolony współczynnik odbicia wynosi:

$$\hat{r} = |r| \cdot e^{j\varphi} = \frac{U_r}{U_h} \quad (11)$$

przy czym:

U_h — napięcie fali bieżącej,

U_r — napięcie fali odbitej.

Chcąc współczynnik r wyrazić wielkościami rezystancji obciążenia oraz rezystancji falowej

$$\hat{r} = \frac{R_a - Z_f}{R_a + Z_f} \quad (12)$$

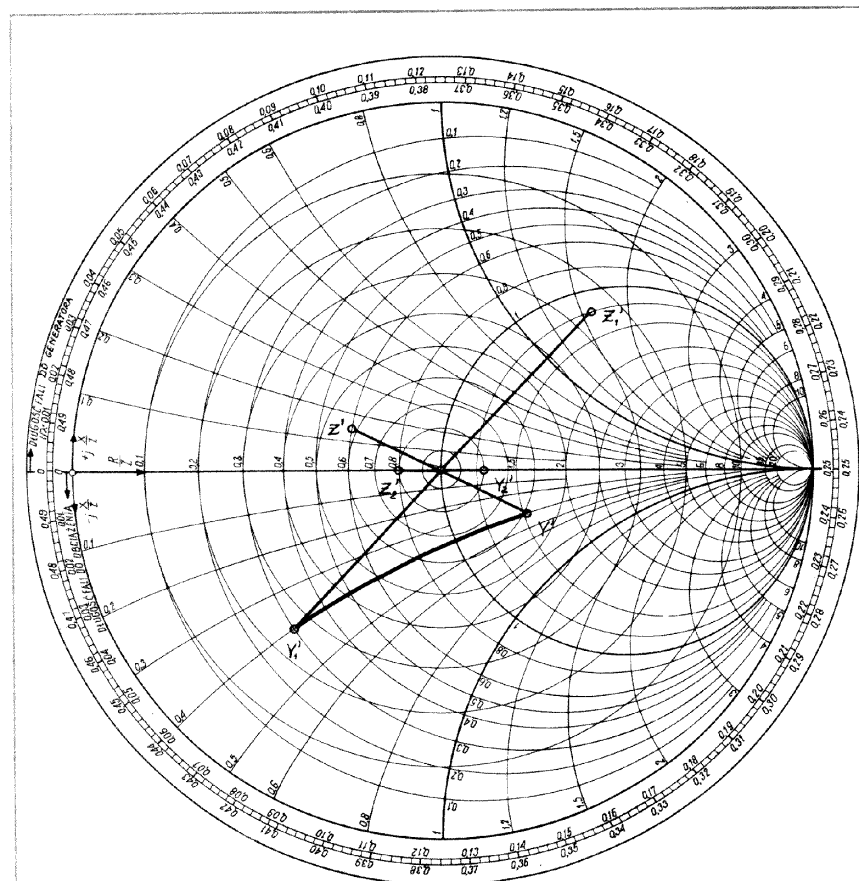
między współczynnikiem dopasowania m , współczynnikiem fali stojącej s oraz współczynnikiem odbicia r występują następujące zależności

$$m = \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \quad (13)$$

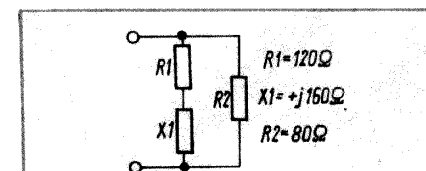
$$s = \frac{1}{m} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad (14)$$

Na wykresie kołowym Smitha są naniezione współczynniki dopasowania m i fali stojącej s . Są nimi współosiowe okręgi wokół punktu środkowego M wykresu, przy czym skala osi rzeczywistej Re odpowiada w zakresie $0-1$ współczynniki m , zaś w zakresie 1 do ∞ współczynniki s :

cd. na str. 20



Rys. 14. Łączenie równoległe impedancji i rezystancji



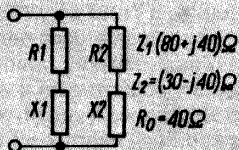
Rys. 13. Układ równoległe połączonych impedancji i rezystancji

$$m = \begin{cases} \frac{R_a}{Z} & \text{dla } R_a < Z \\ \frac{Z}{R_a} & \text{dla } R_a > Z \end{cases}$$

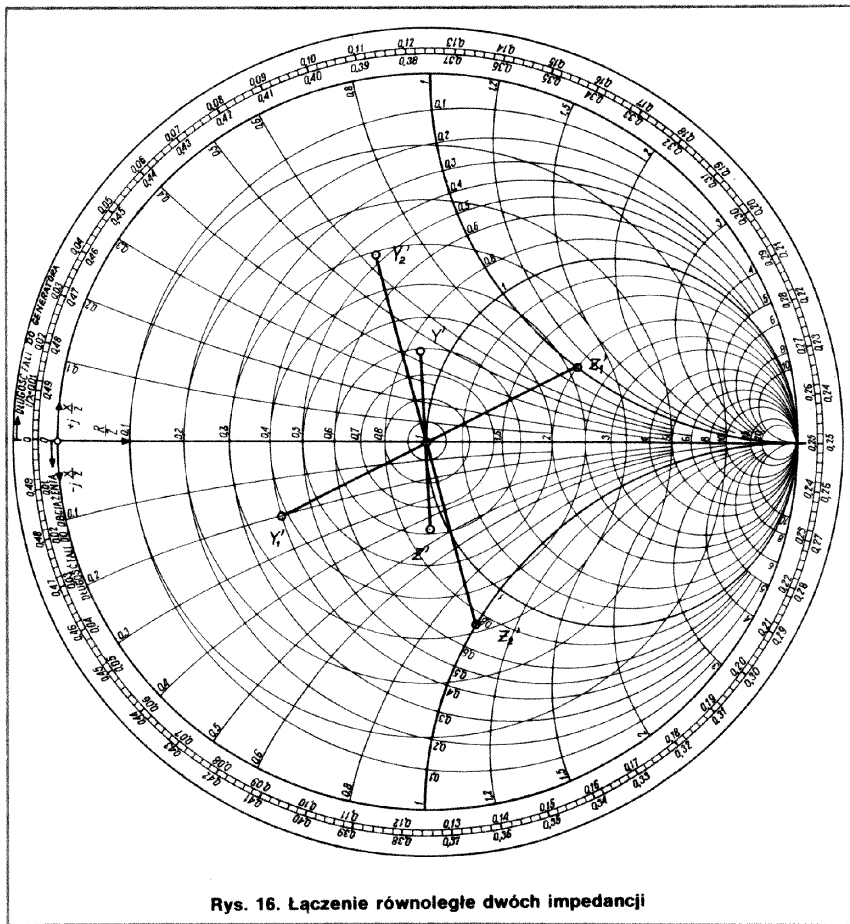
$$S = \begin{cases} \frac{R_a}{Z} & \text{dla } R_a > Z \\ \frac{Z}{R_a} & \text{dla } R_a < Z \end{cases}$$

Rezystancja wejścia bezstratnej linii przesyłowej, obciążonej rezystancją R_a (rys. 19), wynosi:

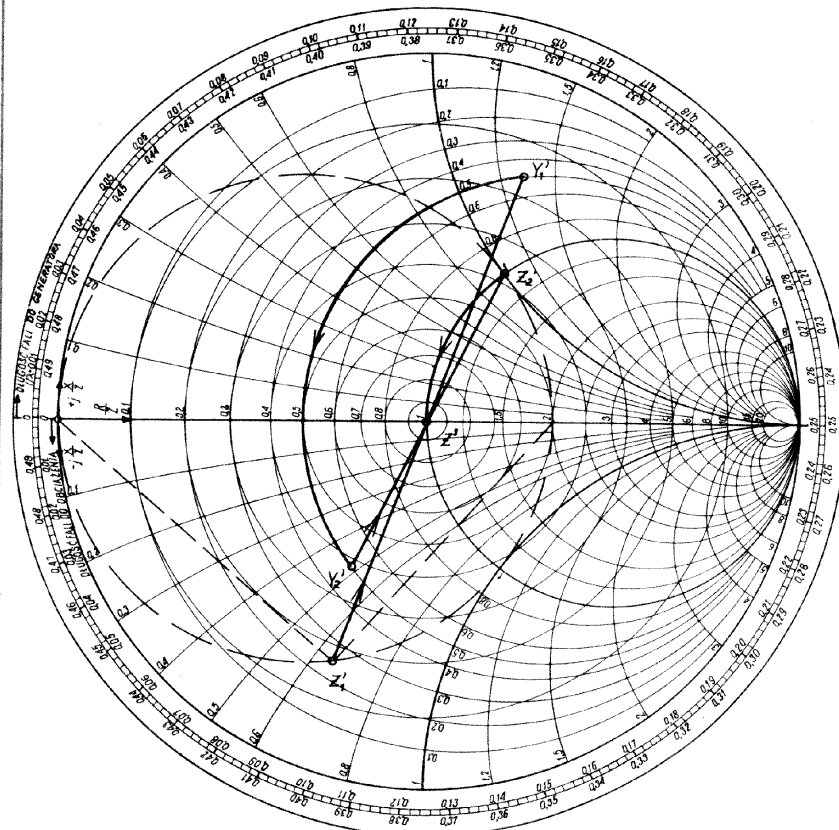
$$R_e = \hat{R}_a \frac{1 + j \frac{Z}{R_a} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}{1 + j \frac{R_a}{Z} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}$$



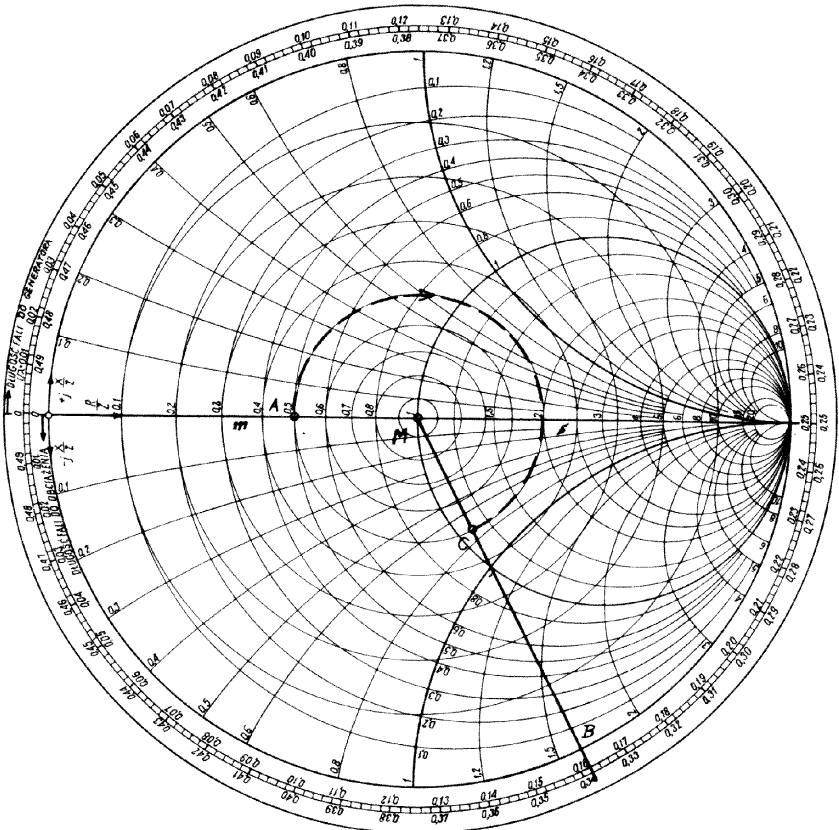
Rys. 15. Układ równolegle połączonych dwóch impedancji



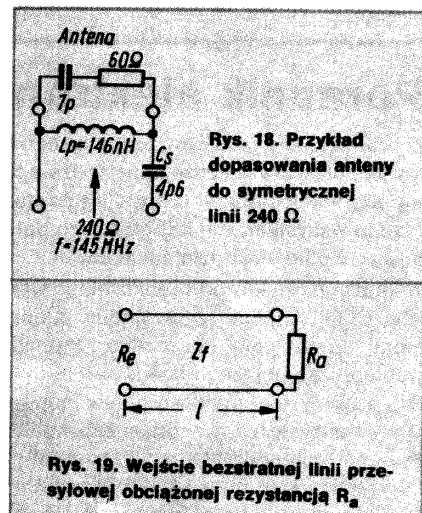
Rys. 16. Łączenie równolegle dwóch impedancji



Rys. 17. Transformacja za pomocą dwóch reaktancji



Rys. 20. Impedancja wejściowa linii przesyłowej obciążonej rezystancją



Na obwodzie wykresu kołowego Smitha jest naniesiona skala stosunku $\frac{1}{\lambda}$.

Ułatwia ona w zasadniczy sposób rozwiązywanie zadań z dziedziny linii przesyłowych.

Przykład 1 (rys. 20)

Linia przesyłowa o rezystancji falowej $Z_f = 50 \Omega$, jest obciążona na swym końcu rezystancją $R_a = 25 \Omega$. Długość linii wynosi 0,7 metra. Długość fali wynosi 2,07 m = 145 MHz. Jaką rezystancją lub impedancją ta linia obciąża generator (nadmajnik)

$$R_o = Z_f = 50 \Omega$$

Na wykresie nanosimy punkt

$$A = \frac{R_a}{Z_f} = 0,5.$$

Aby dojść do punktu B, musimy na skali $\frac{l}{\lambda}$

przebyć drogę $\frac{l}{\lambda} = \frac{0,7}{2,07} = 0,338$ i to w

kierunku od obciążenia — do generatora. Z punktu B prowadzimy prostą do punktu M (środek układu wykresu kołowego). Punkt przecięcia tej prostej z okręgiem dopasowania $m = 0,5$ daje nam pożądaną wynik, tj. punkt C:

$$\frac{R_e}{Z_f} = 1,09 - j0,73$$

$$R_e = R_o \cdot 1,09 - j0,73 = (54,5 - j36,5) \Omega$$

□

Kołowy wykres Smitha (3)

Przykład 2. (rys. 21)

Linie symetryczną 240 Ω obciążamy zespoloną wielkością $R_a = (240 + j480) \Omega$. Długość linii wynosi 2 m, długość fali 10,5 m — 28,5 MHz. R_o obieramy 240 Ω.

$$\frac{R_a}{Z_f} = 1 + j2$$

Kreślimy prostą z punktu M (środek układu) przez punkt $\frac{R_a}{Z_f}$,

odczytujemy na skali $\frac{1}{\lambda}$; wartość $\frac{1}{\lambda} = 0,188$.

Dla dwumetrowej linii przesyłowej, przy długości fali 10,5 m, mamy $\frac{1}{\lambda} = 0,19$. Dodając $0,188 + 0,19$ otrzymujemy $0,378 \frac{1}{\lambda}$,

zaś idąc po okręgu $m = 0,17$ lub $s = 6$, dochodzimy do punktu $R_e \frac{1}{Z_f} = 0,305 - j0,93$, a po odnormowaniu $(73 - j222) \Omega$.

Generator (nadajnik) powinien być obciążony taką rezystancją, która zapewnia optymalne dopasowanie, a więc i optymalną moc wyjściową. Przyjęto się dopasowywać generatory do 50 Ω kabla współosiowego, ale spotyka się także kabel, czyli linia zasilająca, łącząca generator z anteną jest względnie długa, przy wzajemnym ich niedostosowaniu występują straty przekazywanej mocy.

W warunkach optymalnych antena powinna przedstawiać rezystancję równą rezystancji falowej linii zasilającej, ta zaś powinna być optymalnie dopasowana do generatora. Niestety antena nie zawsze spełnia ten wymóg, zachodzi więc konieczność dopasowania jej do linii zasilającej, co można wykonać na drodze transformacji oraz kompensacji.

W kolejnym przykładzie (rys. 22) chcemy dopasować antenę o impedancji $Z_1 = (100 + j25) \Omega$ do linii zasilającej o rezystancji falowej $Z_f = 50 \Omega$. Zabieg ten zamierzamy realizować trzema różnymi sposobami.

1. Kompensacja kondensatorem szeregowym (rys. 23):

$$R_o = Z_f = 50 \Omega \quad Z'_1 = 2 + j0,5$$

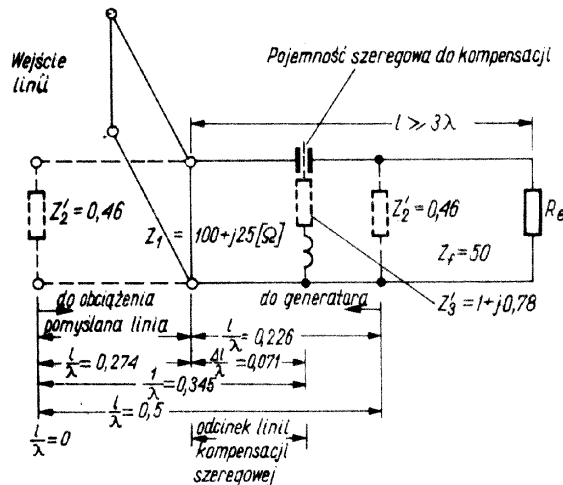
Punkt T'_1 nanosimy na wykres kołowy Smitha, kreśląc zarazem prostą z punktu środkowego M wykresu przez punkt Z'_1 do

skali $\frac{1}{\lambda}$. Wiadomo, że impedancja wejściowa wzdłuż półfalowego odcinka linii zasilającej przybiera różne wartości, w tym także wartości rzeczywiste. Idąc po okręgu m , jaki punkt Z'_2 zatacza wokół punktu środkowego układu, napotkamy punkt $Z'_2 = 0,46$, którego $\frac{1}{\lambda}$ wynosi „0”.

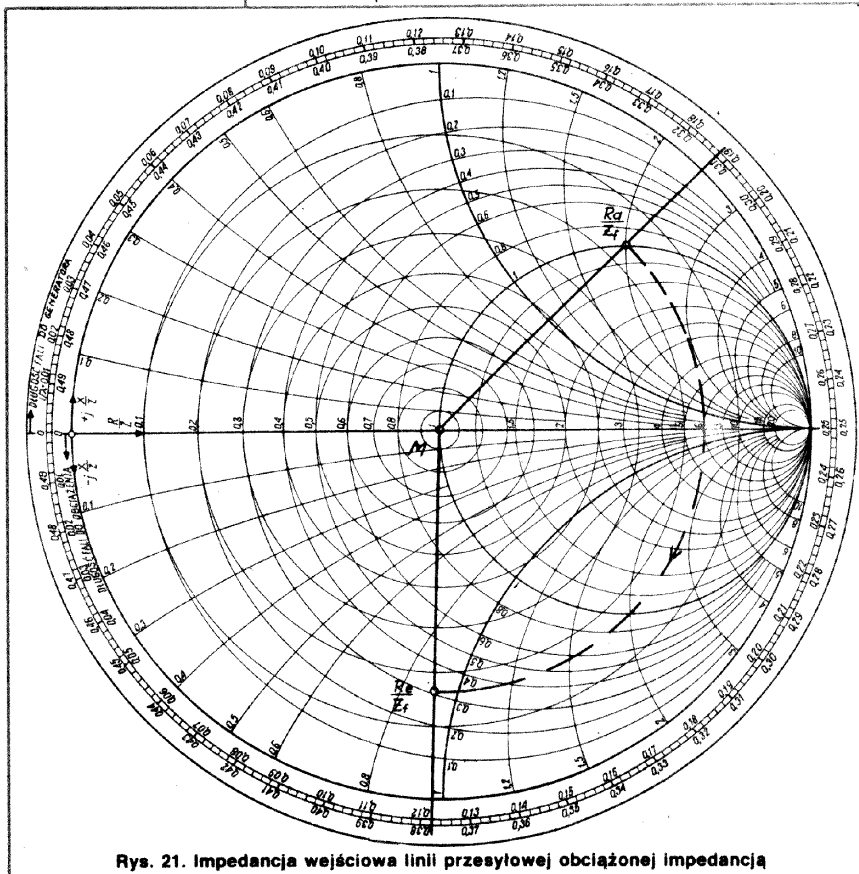
Ponieważ liczyć musimy w kierunku do obciążenia, a więc na wykresie Smitha odwrotnie do ruchu wskazówek zegara, czyli w lewo, punkt Z'_1 jest oddalony od punktu „0” o $\frac{1}{\lambda} = 0,274$ (skala wewnętrzna). Nas jednak interesuje taki punkt na wykresie, w którym okrąg m przecina

mgr inż. G.P. Kaniut SP9RG

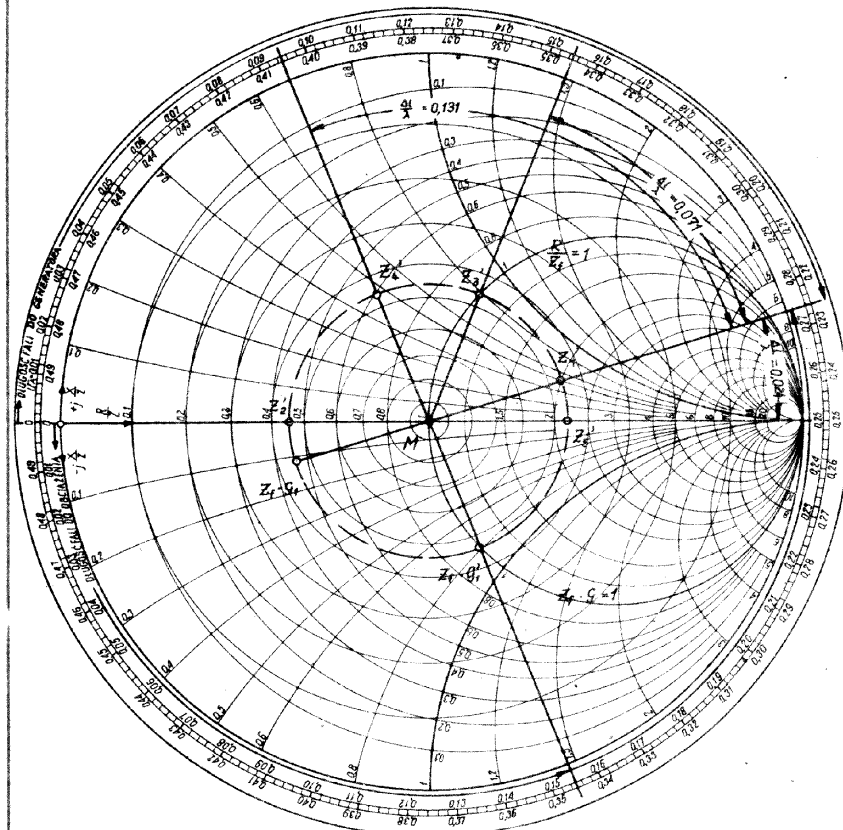
okrąg wartości rzeczywistej $\frac{R}{Z_f} = 1$. Przez ten punkt prowadzimy drugą prostą i odczytujemy jej odległość od punktu „0”, wynosi ona $\frac{1}{\lambda} = 0,345$. Różnica odległości umożliwia nam ustalenie długości odcinka linii zasilającej od anteny, po którym antena przedstawia impedancję $1 + j0,78$. Odcinek ten wynosi $0,345 - 0,274 = \frac{\Delta l}{\lambda} = 0,071$. W punkcie tym



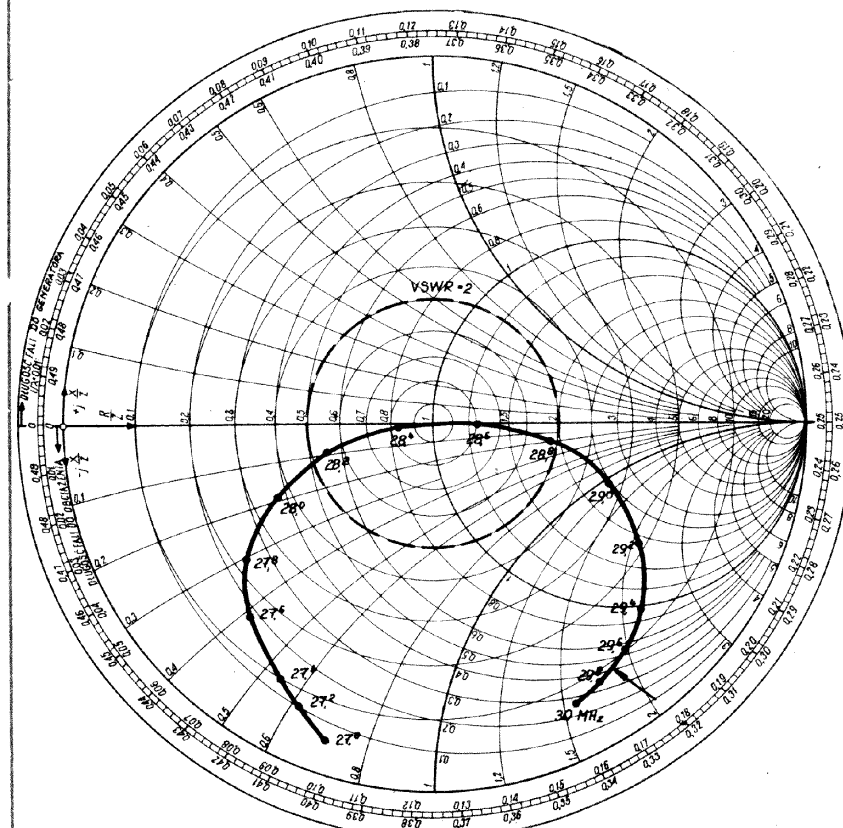
Rys. 22. Dopasowanie anteny do linii zasilającej o rezystancji falowej $Z_f = 50 \Omega$



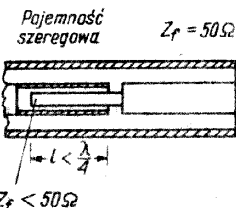
Rys. 21. Impedancja wejściowa linii przesyłowej obciążonej impedancją



Rys. 23. Dopasowanie anteny metodą kompensacji i transformacji



Rys. 28. Charakterystyka trzypasmowej, 4-elementowej anteny Yagi ATB 34



Rys. 24. kompensacja kondensatorem szeregowym

składowa rzeczywista anteny byłaby dopasowana do linii zasilającej, jednak składowa urojona (indukcyjna) musi zostać skompensowana szeregową pojemnością:

$$-\frac{jX_s}{Z_f} = -j0,78, \quad \text{czyli} \quad -jX_s = -j39\Omega$$

Sposób realizacji tej pojemności zależy od częstotliwości pracy generatora. Dla pasma 2 m, szczególnie zaś 70 cm, pojemność taką należy wykonać jako otwarty odcinek linii (kabla współosiowego)

$l < \frac{\lambda}{4}$, zachowujący się jak pojemność i

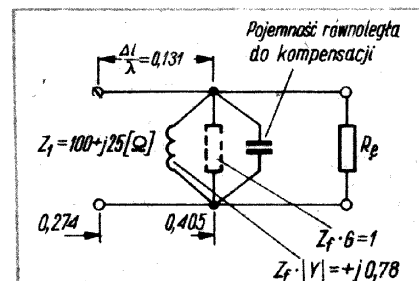
włączyć w odległości $\frac{l}{\lambda} = 0,071$ od anteny, szeregowo w linię zasilającą (rys. 24).

2. Zamiast kondensatora szeregowego można stosować także kondensator równoległy (rys. 25), podłączony jednak w innym miejscu do linii zasilającej. Z uwagi na łączenie równoległe musimy impedancję Z_f zamienić na równoważną admitancję $Z \cdot G_f$. Z powyższego punktu przesuwamy się także po okręgu m w lewo (wewnętrzna skala) do punktu $Z \cdot G_f$ leżącego na okręgu $Z \cdot G = 1$. Prosta w kierunku skali $\frac{1}{\lambda}$ umożliwia odczytanie

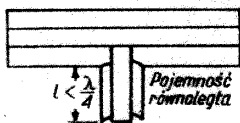
wartości $\frac{1}{\lambda} = 0,155$. Chcąc jednak dalej

liczyć rezystancjami musimy wartość $\frac{1}{\lambda} = 0,155$ przesunąć w lewo o $\frac{1}{\lambda} = 0,25$,

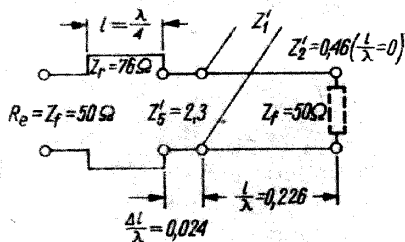
czyli do punktu Z_f i odczytujemy $\frac{1}{\lambda} = 0,405$. Odliczając od tego położenia punktu Z_f ($\frac{1}{\lambda} = 0,274$) otrzymujemy $\frac{\Delta l}{\lambda} =$



Rys. 25. Kompensacja kondensatorem równoległym



Rys. 26. Sposób realizacji pojemności równoległej



Rys. 27. Kompensacja transformatorem ćwierćfalowym

= 0,131. W takiej odległości od anteny musimy podłączyć równoległą pojemność — jX_p .

$$-jX_p = \frac{Z_1}{Z_1 |Y|} = \frac{50}{+j0,78} = j64 \Omega$$

Sposób wykonania pojemności podano na rys. 26.

3. Istnieje jeszcze inny sposób dopasowania anteny do linii zasilającej. Zamiast szeregowej lub równoległej kompensacji

wielkościami urojonymi można stosować $\frac{\lambda}{4}$ transformację.

Transformator taki wymaga jednak obustronnie rzeczywistego dopasowania. Obecnie musimy się posłużyć skalą do generatora, a więc obrotem w prawo. Nasz punkt Z'_1 jest oddalony od „0” układu o $\frac{1}{\lambda} = 0,226$ (zewnętrzna skala).

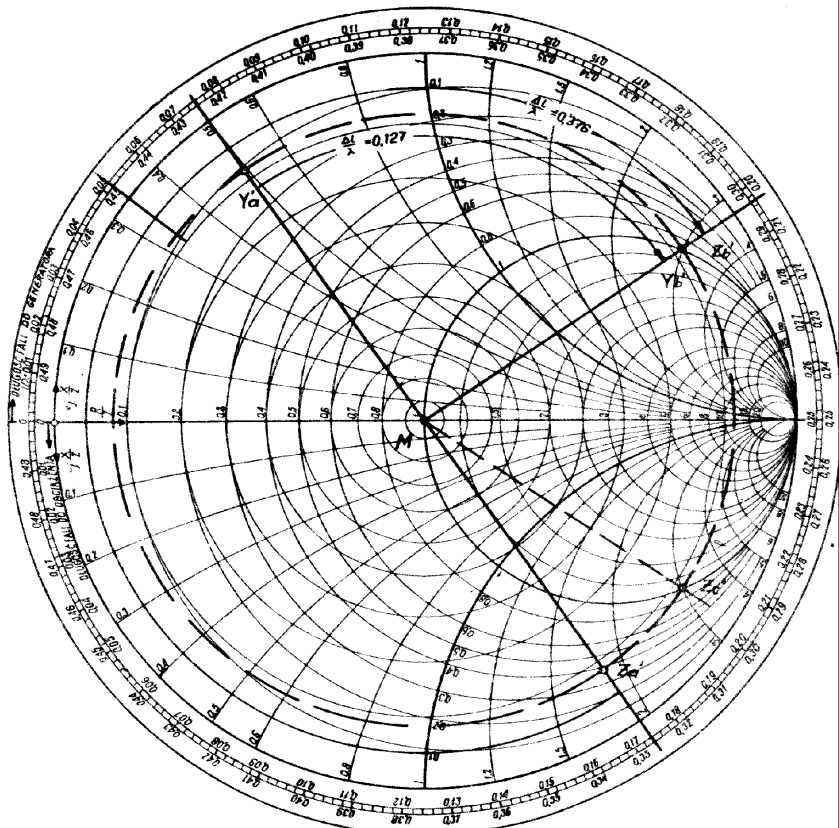
Wystarczy krótki odcinek linii zasilającej $\frac{1}{\lambda} = 0,024$, aby punkt Z'_2 był wielkością realną i wynosił 2,3 + j0, co równa się rezystancji anteny 115 Ω . Rezystancja falowa potrzebnego tu transformatora ćwierćfalowego wynosi:

$$Z_T = \sqrt{115 \cdot 50} = 76 \Omega$$

Wykonanie takiego transformatora nie powinno przysparzać specjalnych kłopotów (rys. 27).

Przykład.

Na rys. 28 przedstawiono charakterystykę 3-pasmowej, 4-elementowej anteny Yagi ATB 34, która jest dopasowana do 50 Ω współosiowej linii zasilającej w granicach $s = 2$ VSWR (ang. voltage standing wave ratio) i na subpasmach fonicznych 14, 21 i 28 MHz pracuje poprawnie. Natomiast w górnej części pasma 10-metrowego niedopasowanie znacznie wzrasta i dla częstotliwości 29,7 MHz wynosi aż $s = 11$ (strzałka na rys. 28). Instalowanie przestrzajnego układu dopasowującego blisko anteny byłoby celowe, ale zbyt kosztowne, szczególnie przy większej mocy nadajnika, poza tym urządzenie to byłoby mało odporne na wpływy atmosferyczne. Instalowanie „match-boxu” blisko nadajnika byłoby w zasadzie możliwe, ale wtedy na całej linii zasilającej panowałoby niedopasowanie VSWR = 11.



Rys. 29.

Dopasowanie anteny Yagi ATB 34 do kabla współosiowego 50 Ω dla częstotliwości 29,7 MHz

Najwłaściwszym rozwiązaniem pozostaje nadal dopasowanie anteny do linii zasilającej blisko samej anteny, jednak z pomocą prostych urządzeń, zdalnie przełączanych.

Impedancja anteny dla częstotliwości 29,7 MHz $Z_a = (19 - j93) \Omega$, normując $R_0 = 50 \Omega$, $Z'_a = 0,38 - j1,86$, zaś $\frac{1}{\lambda} = 0,326$.

Z'_a leży na okręgu $\frac{1}{m} = s = \text{VSWR} = 11$ (rys. 29). Posuwając się po tym okręgu dochodzimy do punktów Z'_b i Z'_c , które o leżą na okręgu wielkości realnych $\frac{R}{Z_1} = 1$.

$$Z'_b = 1 + j3, \quad Z'_c = 1 - j3$$

Znana zasada dopasowania mówi: wielkości rzeczywiste dopasować, wielkości urojone kompensować.

Posuwając się po okręgu VSWR = 11 w kierunku do generatora obrót w prawo, z punktu Z'_b do punktu Z'_c musimy pokonać prawie 3/4 obwodu okręgu; dokładniej:

$$0,5\lambda - 0,326 + 0,203 = 0,376 \frac{1}{\lambda}$$

Przy częstotliwości 29,7 MHz — długości fali 10,1 m oznacza odcinek kabla 0,376 · 10,1 = 3,8 metra. Taki to odcinek kabla powoduje, że $Z'_b = 0,38 - j1,86$ staje się $Z'_c = 1 + j3$.

Jak wiemy, kable współosiowe są izolowane dielektrykiem pianki polietylenowej o stałej dielektrycznej $\epsilon = 2,3$. Na odcinek kabla musi więc być skrócony o $\sqrt{\epsilon} = 1,52$, czyli długości 0,66 analogicznego kabla o dielektryku powietrznym. Łączymy więc odcinek kabla współosiowego o długości 3,8 · 0,66 = 2,51 m jednym jego końcem bezpośrednio z anteną, zaś drugim końcem przez szeregowy kondensator — jX , do takiego samego kabla współosiowego dowolnej długości, prowadzący do nadajnika.

$$\frac{-jX_s}{Z_1} = -j3, \quad \text{czyli } -jX_s = 36\text{pF}$$

Kondensator ten, odpowiedni do mocy nadajnika, włączamy szeregowo między przewody środkowe obydwóch odcinków kabla współosiowego, zaś ich ekrany łączymy razem. Należy pamiętać, że na odcinku kabla, od anteny do kondensatora, panuje $VSWR = 11$, zaś po kondensatorze na długim odcinku kabla do nadajnika panuje $VSWR = s = m = 1$. Przy większych mocach nadajnika celowe jest te 2,51 metra wykonać z nieco mocniejszego kabla.

Zadanie nasze możemy też inaczej rozwiązać. Wystarczy tu odcinek kabla współosiowego o długości 0,35 m, zwarty na jednym końcu, który dołączamy do przewodu środkowego i ekranu kabla, łączącego antenę z nadajnikiem w odległości 0,84 m od anteny (rys. 30).

Ponieważ zachodzi konieczność łączenia równoległego $Z'_a = 0,38 - j1,86$ anteny, musimy inwertować do $Y'_a = 0,086 + j0,49$, co odpowiada $\frac{1}{\lambda} = 0,076$. Posuwamy się po

okręgu $VSWR = 11$ w prawo, dochodząc do punktu Y'_b , który leży na okręgu $Z_1 \cdot G = 1$. Punkt ten graficznie pokrywa się z punktem Z'_b , oznacza jednak admitancję o charakterze pojemnościowym. Odległość ta wynosi

$$0,203 - 0,076 = \frac{\Delta l}{\lambda} = 0,127$$

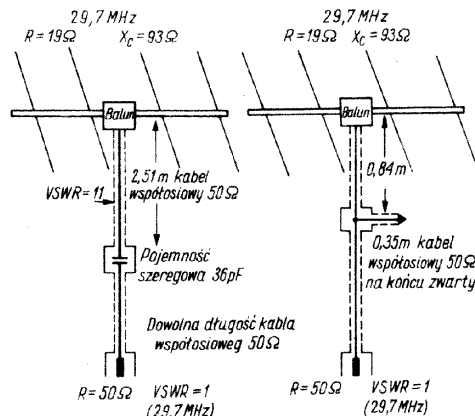
$0,127 \cdot 10,1 = 1,28$ m kabla o dielektryku powietrznym lub $1,28 \cdot 0,66 = 0,84$ m kabla o dielektryku z pianki polietylenowej. W punkcie tym $Y'_b = 1 + j3$ (pojemnościowe) należy podłączyć indukcyjność kompensacyjną $-j3 \cdot 20 \text{ mS} = 60 \text{ mS} = j16,7 \Omega$, co przy częstotliwości 29,7 MHz oznacza 90 nH. Tę kompensację możnaby przeprowadzić za pomocą kilkucentymetrowej pętli przewodu miedzianego. Znacznie jednak wygodniej stosować odcinek kabla współosiowego zwarty po jednej stronie. Do określenia jego długości posłużymy się także wykresem Smitha:

$$\frac{16,7}{50} = 0,345$$

Posuwając się po dodatniej osi urojonej $+j \frac{X}{Z}$ do punktu 0,345

odpowiada jemu na skali $\frac{1}{\lambda}$ wartość 0,052 λ :

$$0,052 \cdot 10,1 \cdot 0,66 = 0,346 \text{ m}$$



Rys. 30. Rozwiązanie praktyczne dopasowania anteny Yagi A:B 34

Taki odcinek jednostronnie zwartego kabla współosiowego, przy częstotliwości 29,7 MHz powoduje kompensację składowej pojemnościowej anteny i jej dopasowanie do 50 Ω , czyli $VSWR = 4$.

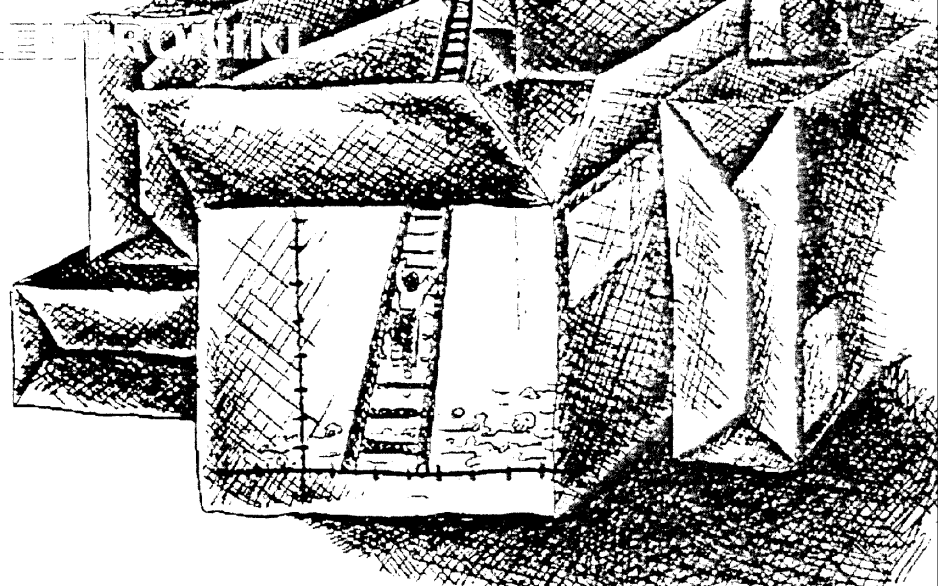
Zarówno kondensator szeregowy z przykładu 1, jak ten 35-centymetrowy odcinek zwartego kabla współosiowego można podłączać i odłączać za pomocą odpowiedniego przekaźnika, umieszczonego w hermetycznie zamkniętej metalowej obudowie.

Przedstawione przykłady graficznego dopasowania układów w.c.z. za pomocą kołowego wykresu Smitha należy traktować jako inspirację do rozwiązywania innych podobnych zadań. Wykres ten znalazł bardzo szerokie zastosowanie i można go spotkać nawet w materiałach informacyjnych nowoczesnych tranzystorów do pracy w zakresach gigahercowych.

Przyswojenie sobie techniki posługiwania się wykresem powinno amatorom-krótkofalowcom dopomóc w realizacji wielu złożonych zagadnień, które do tej pory traktowano częściowo jako tabu lub rozwiązywano metodami eksperymentalnymi.

LITERATURA

- [1] Smith P.H.: Transmission Line Calculator. „Electronics” nr 12/1939
- [2] Geschwinde H.: Die Praxis der Kreis und Leitungsdiagramme in der HF. „Technik” 1959
- [3] Rothammel K.: Antennenbuch 1984
- [4] Schwarzbeck G.: Antennenimpedanz und Transformation mit dem Smith Diagramm. cq-DL 9/78



Liczby zespolone, II

W poprzednim miesiącu doszliśmy do wniosku, że graficzną reprezentacją liczby $\sqrt{-1}$ nie jest żaden punkt na osi liczb rzeczywistych...

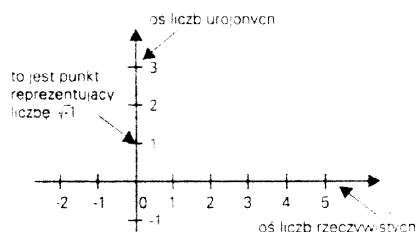
No właśnie, a niby dlaczego mamy się ograniczać do punktów na osi? Dlaczego nie mielibyśmy wprowadzić drugiej osi i wykorzystać płaszczyzny?

Genialna myśl! Na płaszczyźnie znajdziemy graficzną reprezentację liczby $\sqrt{-1}$. Na rysunku 2 pokazuję ci nie os liczbową, tylko „płaszczyznę liczbową”, zwaną płaszczyzną liczb zespolonych. Na płaszczyźnie tej mamy naszą starą znajomą: os liczb rzeczywistych. Mamy też drugą, prostopadłą os.

Rozszerzamy więc pojęcie liczby. Nadal graficzną reprezentacją liczb są punkty. Jeszcze wszystkiego nie rozumiesz, ale się chyba zbytnio nie zdziwisz, jeśli powiem, iż liczbę pierwiastek (drugiego stopnia) z -1 reprezentuje punkt na tej drugiej osi, w odległości jednej jednostki od punktu zerowego tej osi (to zresztą zgadza się z intuicją, która podpowiada, że pierwiastek z -1 powinien mieć jakiś związek z liczbą 1).

Ale liczby mogą leżeć nie tylko na obydwu osiach, lecz na całej płaszczyźnie.

Może zaprotestujesz, że jest to tylko abstrakcja, nie mająca nic wspólnego z rzeczywistością. Jak takie dziwaczne liczby dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić? Stop! Nie zabawiaj się znów w Fenicjanina, który nie potrafił sobie wyobrazić „odwrotnych”, i „niepełnych” owiec.



Rys. 2.

Niech do ciebie dotrze, że po prostu na razie tego nie umiesz, ale jest to możliwe, i nawet wcale nie trudne. O tym za chwilę.

Teraz już powinieneś wreszcie zrozumieć, dlaczego tłumaczę ci, jak chłop krowie na granicy, sprawę tych liczb zespolonych. Oczywiście wracamy do pojęcia oporności. „Czysta” rezystancja możemy wyrażać znanymi każdemu liczbami rzeczywistymi. Ale już do przedstawienia reaktancji, konieczne są jakieś „pełniejsze” liczby. I właśnie do obliczeń oporności, a ściślej mówiąc, impedancji doskonale nadają się liczby zespolone, które

właśnie wspólnie przed chwilą „wykombinowaliśmy”.

Czy już wiesz jak zaznaczyć rezystancję, jak reaktancję indukcyjną, a jak pojemnościową?

Ale może na razie trudno ci jest uporządkować podane informacje. Wróć więc do poprzednich artykułów i pomalutkę próbuj sobie wszystko poukładać w głowie.

Nie ty jeden masz kłopoty z upchnięciem sobie pod czaszką nowego pojęcia liczby, zrozumienia jej sensu i wykorzystania w praktyce. Pocieszę cię! Inni też mieli kłopoty, i dlatego długi czas, aż do dziewiętnastego wieku mówiono o osi urojonej i liczbach urojonych. Dlaczego urojonych? Wydawało się, że takie pojęcia liczby, jak pokazałem ci na rysunku 2 naprawdę nie mają związku z rzeczywistością – stąd nazwa – liczby urojone. Dopiero wielcy matematycy Hamilton i Gauss ugruntowali podstawy logiczne takich liczb. Okazało się, że wcale nie są to żadne liczby urojone, w domyśle – nieprawdziwe. Są to najprawdziwsze liczby – nazywamy je liczbami zespolonymi. Istnieją nie tylko w wyobraźni matematyków i na „płaszczyźnie liczbowej”.

Czy są to jakieś inne liczby, niż znane nam dobrze liczby rzeczywiste? Jak pokazuje rysunek 2, liczby rzeczywiste są po prostu tylko niewielką częścią (podzbiorem) zbioru liczb zespolonych. Wszystkie znane do tej pory liczby (rzeczywiste) mają swą reprezentację na jednej prostej – na osi liczb rzeczywistych. A oto teraz mamy do dyspozycji nie jedną prostą, lecz całą płaszczyznę. Czyli oprócz znanych nam liczb rzeczywistych mamy do dyspozycji nieskończenie wiele innych liczb. Po co nam te liczby? Za chwilę oka-

że się tak samo przydatne, jak „odwrotne owce” Fenicjan.

Sposoby zapisu liczb

Popatrz, oto kilka przykładów zapisu liczb rzeczywistych:

4
-1,2003419
 $\sqrt{2}$
 2π
 $\frac{11}{19}$
-0,0909(09)

Ale liczby można zapisać inaczej, na przykład w systemie rzymskim CLXVII to liczba sto sześćdziesiąt siedem. Rzymski system zapisu jest jednak bardzo niepraktyczny, bo nie sposób zapisać przy jego pomocy liczb ujemnych, ułamków i liczb niewymiernych. Tym bardziej bezużyteczne są wcześniejsze systemy zapisu, na przykład fenicki, egipski czy babiloński.

Chcę ci tu pokazać, że liczba rzeczywista jest abstrakcyjnym pojęciem matematycznym, a jej sposób zapisu może być rozmaity. Wybieramy taki sposób zapisu, który nam pasuje i jest wygodny przy obliczeniach.

Doszliśmy tu do ważnego pytania: jak zapisać liczby zespolone?

Popatrz na rysunki 1, 2. Liczby reprezentowane są na płaszczyźnie przez punkty.

Czy rozumiesz, że punkty na płaszczyźnie zespolonej nie są liczbami, tylko są graficznym przedstawieniem, czyli jakąś tam reprezentacją liczb?

W przypadku osi liczb rzeczywistych, do pełnego scharakteryzowania punktu odpowiadającego liczbie, wystarczy podać odległość od punktu początkowego

(zerowego) oraz znak plus lub minus. Wszystko wskazuje, że teraz potrzeba będzie czegoś więcej.

Rzeczywiście, dla liczb zespolonych należy podać informacje, jednoznacznie lokalizujące punkt odpowiadający tej liczbie na płaszczyźnie zespolonej. I tu mamy kilka możliwości. Popatrz na **rysunek 3**. Weźmy jakąś liczbę zespoloną. Nazwijmy ją z . Niech jej graficzną reprezentacją na płaszczyźnie zespolonej będzie punkt z . Położenie punktu z na płaszczyźnie można określić podając jego dwie współrzędne, odniesione do obu osi. Znamy to z geometrii.

W każdym razie powiemy, że punkt z ma współrzędne $(2, 2)$. Z grubsza biorąc znaczy to, że punkt z jest oddalony od osi pionowej o dwie odległości jednostkowe w prawo, i jednocześnie oddalony od osi poziomej o dwie odległości jednostkowe w górę.

Zgodnie z przyjętymi sposobami zapisu, powiemy, że dla liczby zespolonej a , zaznaczony na tymże rysunku punkt a ma współrzędne $(-2, 1)$.

W geometrii powszechnie nazywa się os poziomą osią X , a os pionową – osią Y . Teraz jednak rozważamy sprawę liczb zespolonych. Nie mówimy tu o osi X i Y . Mamy natomiast os liczb rzeczywistych (na rysunkach jest to os pozioma), oraz nazwaną tak ze względów historycznych, os liczb urojonych.

Poznaliśmy więc pierwszy sposób zapisu liczb zespolonych: za pomocą pary liczb (rzeczywistych). Pierwsza z tych dwóch liczb nazywana jest częścią rzeczywistą liczby zespolonej, a druga – częścią urojoną liczby zespolonej. Żeby nie było wątpliwości, należałoby jakoś oznaczyć obie części. Część rzeczywistą oznacza się Re (od angielskiego *real*), a część urojoną – Im (od – *imaginary*).

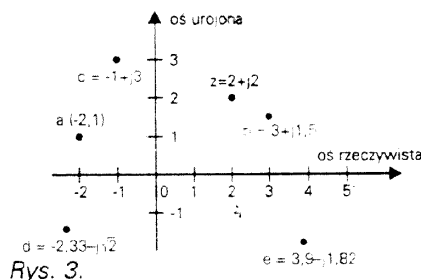
Przyjęto, że przy takim zapisie liczb zespolonych, najpierw podaje się część rzeczywistą, potem część urojoną. Dla uniknięcia pomyłek, część urojoną (*imaginary*) w matematyce poprzedza się małą literką i . W elektronice litera i kojarzy się z prądem, więc zamiast i , piszemy j .

Oto przykłady liczb zespolonych:

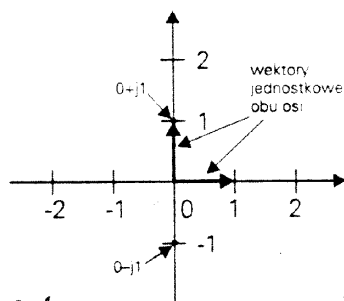
$$\begin{aligned} b &= 3+j1,5 \\ c &= -1+j3 \\ d &= -2,33-j\sqrt{2} \\ e &= 3,9-j1,82 \end{aligned}$$

Ich reprezentację graficzną na płaszczyźnie możesz zobaczyć na rysunku 3.

Zauważ, że na osi pionowej nie zaznaczyłem żadnego pierwiastka z minus jeden. Nie jest to os żadnych „ujemnych pierwiastków”. Jest to os podobna do osi liczb rzeczywistych (trochę upraszczając powiemy, że jest to druga, taka sama os). Czy więc ów nieszczęsny $\sqrt{-1}$ jest



Rys. 3.



Rys. 4.

nam w ogóle potrzebny? Niekiedy mówi się, że właśnie literka j to ów $\sqrt{-1}$.

Nie jest to do końca prawdą. Uważaj! Co jest rozwiązaniem równania:

$$x^2 = 1$$

Inaczej mówiąc: $\sqrt{-1}$ równa się...?

Czy to tylko jedna liczba?

Oczywiście, że nie: rozwiązaniem są liczby -1 oraz 1 . Tak samo rozwiązaniem równania:

$$x^2 = -1$$

też są dwie liczby. Jedną z nich to $0+j1$ (czyli po prostu $j1$), druga to $0-j1$ (czyli $-j1$). Obie te liczby zaznaczyłem ci na **rysunku 4**.

Inaczej mówiąc, istnieją dwie (!) liczby, które są pierwiastkami z minus jeden! A więc?

Pierwiastek z -1 wprowadziłem tylko po to, żeby ci pokazać, że są liczby, które nie są liczbami rzeczywistymi. Teraz już $\sqrt{-1}$ nie będzie ci do niczego potrzebny. Zapominamy o nim.

Ale co z pionową osią? Tak jak mówiliśmy, nie jest to żadna os „ujemnych pierwiastków”. Po prostu mamy teraz całą masę liczb. Kiedyś mieliśmy „tylko” liczby rzeczywiste. Do ich graficznej reprezentacji wystarczyła jedna prosta. Teraz, do graficznej reprezentacji liczb zespolonych potrzebna jest płaszczyzna.

Jeszcze raz ci powtarzam, punkty nie są liczbami. Fenicjanin nierozdzielnie kojarzył liczby z owcami. My, przyzwyczajeni od dawna, skłonni jesteśmy utożsamiać liczby z punktami na osi. Nie potrafimy wyobrazić sobie „golej” liczby; liczby jako takiej – zawsze musimy podpieścić się jakimś wyobrażeniem: owiec, punktów, palców u rąk, itp.

Teraz mamy płaszczyznę zespoloną. Liczby reprezentowane są przez punkty.

Musimy znaleźć jakiś sposób na zapamiętanie nad całym tym bałaganem.

Oprócz osi liczb rzeczywistych, na płaszczyźnie tej umieszczamy więc drugą os, która pomoże nam w prosty sposób zapisać dowolne liczby zespolone.

Mówię „umieszczamy”; czy to znaczy, że tej osi moglibyśmy tam nie umieszczać? Tak! Nie zapominaj, że mówimy o liczbach (czyli pojęciach abstrakcyjnych). Wśród liczb nie ma żadnych osi – wyobrażamy sobie te osie, rysujemy na płaszczyźnie tylko po to, żeby znaleźć dobry i prosty sposób „zapanowania nad nimi” czyli zapisu liczb zespolonych.

Nie potrzeba tu żadnego $\sqrt{-1}$. Potrzebne natomiast są jakieś odcinki, czy raczej wektory jednostkowe na poszczególnych osiach. Wektory te zaznaczyłem ci na **rysunku 4**. Literkę j w zapisie liczby zespolonej możemy więc raczej traktować, jako wektor jednostkowy (tzw. wersor) osi urojonej.

Stąd już tylko jeden krok do dalszego rozszerzenia pojęcia liczby. Najpierw

Microelectronic Inc.

HOLTEK

Dystrybutor w Polsce:
TECHMAR S.C.



OFERUJE układy serii HT:

- minimum elementów zewnętrznych w aplikacjach,
- maksimum możliwości, najnowsza technologia.
- Pamięci MASK ROM, SRAM, EEPROM, EPROM,
- Wieloznakowe wyświetlacze LED i LCD ze sterownikami,
- Układy komputerowe: I/O, klawiatury, myszy i in.,
- Układy telekomunikacyjne: do telefonów, automatów zgł., pagerów,
- Użytkowe: syntezy mowy, muzyki, efektów dźwiękowych, zdalnego sterowania (także zmienny kod), ściemniacze, do zabawek,
- Układy logiczne programowalne i standardowe i wiele innych.

Informacje i zamówienia (także jednostkowe):

Techmar S.C. 02-080 Zabierzów ul. Źródłana 25

tel. (012) 851-805 fax: (012) 138-646

E-mail: techmar@kr.onet.pl

Informacje o firmie Holtek i jej wyrobach:

<http://www.holtek.com> oraz w firmie Techmar.

mieliśmy oś liczbową. Wystarczyło to dla zobrazowania wszystkich liczb rzeczywistych. Teraz wprowadziliśmy płaszczyznę zespoloną, na której możemy przedstawić wszystkie liczby zespolone. Chyba się już domyśliłeś, że można jeszcze bardziej rozszerzyć pojęcie liczby. Graficzną reprezentacją takich „rozszerzonych liczb, będą punkty w przestrzeni. Do zapisu takich liczb można wykorzystać trójki liczb, które określają odległość od poszczególnych osi. A czy można dodać jeszcze jedną, czwartą oś? Oczywiście! Nie tylko czwartą, ale i piątą, szóstą itd. Nie bardzo potrafimy wyobrazić sobie przestrzeni więcej niż trójwymiarowej, ale nie tylko można tak robić, ale tak się robi, i co ciekawe... liczby takie są powszechnie wykorzystywane w obliczeniach technicznych. Naukowcy przypuszczają, że nasz wszechświat może być 10-wymiarowy. Jeśli tak jest, to w do opisujących go obliczeń należy używać liczb, które można zapisać w postaci nie pary, trójki, czy czwórki, ale dziesiątki liczb (rzeczywistych). Przykładowo liczba taką jest liczba u:

$$u = 2,4 + j2,39 - k0,023 + l562,4 + m31,4 - n0,000012 - o23 - p9,91 + r1,1 - s3,33$$

Poszczególne literki j...s oznaczają tu wektory jednostkowe (wersory) kolejnych osi (wymiarów). Czy takie liczby można mnożyć, dzielić, dodawać, odejmować itp? Tak! Ale to już historia z zupełnie innej bajki.

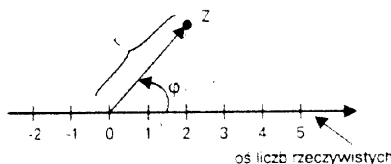
Wracamy do liczb zespolonych, bo za bardzo odeszliśmy od elektroniki i naszej impedancji.

Powiedzieliśmy, że liczby można zapisywać w różny sposób. Przed chwilą poznałeś sposób zapisu liczb zespolonych w postaci zwanej algebraiczną lub kanoniczną. Spotyka się też określenia zapisu prostokątny (ang. rectangular) i zapis kartezjański. Powiedziałem ci, że oś urojona wstawiliśmy, bo była nam potrzebna do znalezienia prostego sposobu zapisu. Teraz poradzimy sobie bez niej.

Spójrz na rysunek 5. Znowu mamy płaszczyznę zespoloną. Tę samą liczbę z, reprezentowaną na rysunku 3 przez punkt z, możemy określić, podając odległość od punktu początkowego (zerowego) oraz kąt, jaki powstały odcinek, a właściwie wektor, tworzy z dodatnim zwrotem osi liczb rzeczywistych.

W takim zapisie liczbę zespoloną z reprezentować będzie tak zwany moduł r (odległość od początku układu współrzędnych) oraz argument ϕ (czyli wspomniany kąt). Taki sposób zapisu liczb zespolonych nazywamy wykładniczym lub biegunowym (ang. polar).

Teraz naszą liczbę z, będziemy zapisywać w dwóch postaciach:



Rys. 5.

$2\sqrt{2}$ to moduł, 45 stopni to argument, e to liczba Nepera, podstawa logarytmów naturalnych (w przybliżeniu $e=2,71828182...$). Nie musisz rozumieć, skąd i dlaczego w zapisie pojawiła się liczba e. Powinieneś tylko wiedzieć, jaki jest sens takiego zapisu. A to, jak pokazuje rysunek 5, jest beznadziejnie proste.

Cały czas pamiętaj też, że w obu wypadkach naszą liczbę z reprezentuje na płaszczyźnie ten sam punkt. My tylko w różny sposób to zapisujemy.

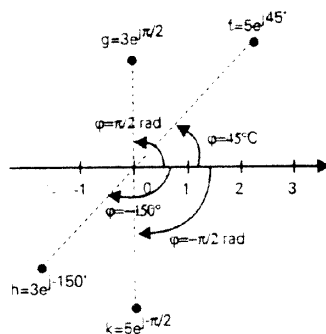
Poniżej podaję ci kilka przykładów zapisu liczb zespolonych w postaci wykładniczej:

$$\begin{aligned} f &= 5e^{j45^\circ} \\ g &= 3e^{j150^\circ} \\ h &= 3e^{-j150^\circ} \\ k &= 5e^{-j45^\circ} \end{aligned}$$

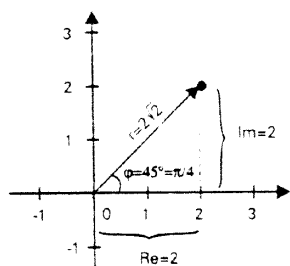
Druga i czwarta liczba mają argument podany nie w stopniach, tylko w mierze łukowej – w radianach (π radianów (w przybliżeniu 3,14159265 radianów) to 180 stopni). Na rysunku 6 możesz zobaczyć geometryczną interpretację tych liczb.

Teraz, jak cię znam, zapytasz jak zamieniać postać algebraiczną na wykładniczą i na odwrót.

To proste. Popatrz na rysunek 7. Jeśli mamy postać algebraiczną (mamy Re



Rys. 6.



Rys. 7.

i Im), to musimy obliczyć moduł r, korzystając choćby z twierdzenia Pitagorasa, oraz argument ϕ , korzystając z definicji którejś z funkcji trygonometrycznej.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy moduł:

$$r = \sqrt{(\text{Re}^2 + \text{Im}^2)}$$

Dla naszej liczby z:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{4 \cdot 2} = \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Z definicji funkcji sinus lub cosinus obliczamy argument:

$$\sin \phi = \frac{\text{Im}}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

możemy też wykorzystać funkcję cosinus:

$$\cos \phi = \frac{\text{Re}}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

stąd oczywiście $\phi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radianów.

W tym wypadku zdarzyło się, że sinus i cosinus naszego kąta mają tę samą wartość $\frac{1}{\sqrt{2}}$ – jest to szczególny przypadek, dla większości kątów wartości te będą różne, co niczego nie zmienia.

Tą metodą możemy zamieniać zapis z algebraicznego na wykładniczy.

W drugą stronę pójdzie chyba jeszcze łatwiej:

Zauważ, że na podstawie podanych powyżej wzorów na sinus i cosinus kąta ϕ możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \text{Im} &= r \cdot \sin \phi \\ \text{Re} &= r \cdot \cos \phi \end{aligned}$$

Piszemy więc po prostu:

$$re^{j\phi} = (r \cdot \cos \phi) + j(r \cdot \sin \phi)$$

Ten ostatni sposób zapisu liczb zespolonych nazywany trygonometrycznym.

Wystarczy obliczyć wartość kosinusa i sinusa kąta ϕ , a potem pomnożyć przez r.

A oto przykłady liczb zespolonych w zapisie trygonometrycznym:

$$\begin{aligned} l &= (5,21 \cdot \cos 67^\circ) + j(5,21 \cdot \sin 67^\circ) \\ m &= (4 \cdot \cos(-142^\circ)) - j(4 \cdot \sin(-142^\circ)) \\ n &= -(195 \cdot \cos(\frac{\pi}{3})) + j(195 \cdot \sin(\frac{\pi}{3})) \end{aligned}$$

Naszą liczbę z umiemy już zapisać na trzy sposoby:

$$\begin{aligned} z &= 2 + j2 = 2\sqrt{2} e^{j45^\circ} = \\ &= (2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ) + j(2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ) \end{aligned}$$

A teraz w ramach ćwiczenia, możesz samodzielnie wyrazić podane liczby zespolone b...n na wszystkie trzy sposoby. Potrzebny do tego będzie kalkulator z funkcjami trygonometrycznymi. Gdy masz moduł r i argument ϕ , będziesz wykorzystywał klawisze sin, cos. Gdy masz część rzeczywistą Re i urojoną Im, do obliczenia kąta wykorzystasz funkcje arcus sinus i arcus cosinus, dostępne zazwyczaj po naciśnięciu klawiszy inv sin, inv cos.

Niektóre kalkulatory naukowe potrafią przeliczać liczby zespolone z jednej postaci na drugą za jednym naciśnięciem klawisza – sprawdź to w instrukcji twojego kalkulatora. Jeśli znajdziesz skróty „rect(angular)- polar” (lub P-R R-P)- to jest ta funkcja.

Działania na liczbach zespolonych

Zaspokoiliś swoją ciekawość, ale wcale nie bawi cię znużające przeliczanie. Czy nie wystarczyłaby jedna postać liczb zespolonych?

Nie! Chodzi o obliczenia na tych liczbach. Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych bardzo prosto przeprowadza się na postaci algebraicznej: po prostu sumujemy lub odejmujemy części rzeczywiste i części urojone:

Wykonajmy działania:

$$(3+j2) + (-1+j3) = (3-1) + j(2+3) = 2+j5$$

$$(-3-j1) - (2-j2) = (-3-2) + j(-1-(-2)) = -5 + j1$$

Interpretację geometryczną tych działań narysuj sam, jeśli chcesz, przekonasz się wtedy, że jest to po prostu znane ci ze szkoły dodawanie wektorów.

Przy okazji: widzisz chyba jasno, że w wypadku liczb zespolonych traci sens określenie: liczba większa lub liczba mniejsza. Możemy jedynie mówić o większym lub mniejszym module. W elektronice przy obliczeniach impedancji często interesować nas będzie właśnie wartość modułu impedancji.

Liczbę w postaci algebraicznej można też mnożyć i dzielić. Nie będa ci tu podawał szczegółów – znajdziesz je w książkach. Zapamiętaj jedynie, że bardzo łatwe jest mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci wykładniczej. Uważaj!

Mnożenie: mnożymy moduły, a argumenty dodajemy.

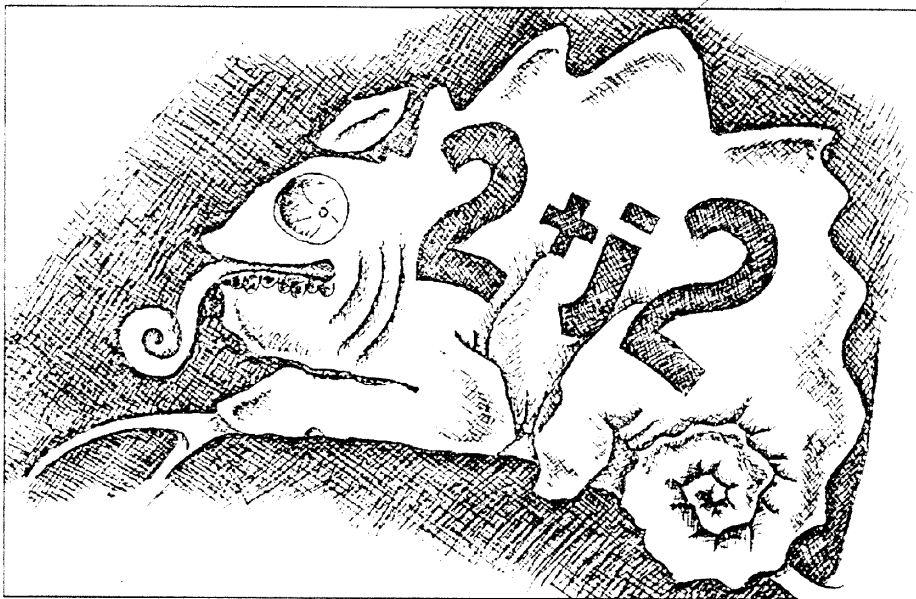
Dzielenie: moduły dzielimy, argumenty odejmujemy.

Dla podanych wcześniej liczb f, g, h, k obliczmy:

$$f \cdot h = 5e^{j45^\circ} \cdot 3e^{j135^\circ} = 5 \cdot 3e^{j(45^\circ+135^\circ)} = 15e^{j180^\circ}$$

$$\frac{g}{k} = \frac{3e^{j90^\circ}}{5e^{j270^\circ}} = \frac{3}{5}e^{j(90^\circ-270^\circ)} = 0,6e^{j180^\circ}$$

Graficzną ilustrację tych działań po odrobinie zastanowienia narysujesz sam. Przy okazji w ostatnim obliczeniu otrzymaliśmy ciekawy wynik. Co to znaczy, że argument wynosi π radianów, czyli 180



stopni? 180 stopni? Przecież to jest po prostu liczba rzeczywista ujemna:

$$0,6e^{j\pi} = -0,6$$

Z tego, co dotychczas tłumaczyłem ci o rozwoju pojęcia liczby, poczynając od liczb naturalnych do zespolonych, można wyciągnąć wniosek, że działania matematyczne na liczbach zespolonych nie powinny w żaden sposób kolidować z zasadami obliczeń na liczbach rzeczywistych. Tak jest w istocie – wprowadzenie liczb zespolonych rozszerza tylko możliwości obliczeń. Co prawda komplikuje nieco te obliczenia, ale wcale nie jest aż takie trudne jak ci się wydawało.

A teraz powrócimy na chwilę do liczb rzeczywistych.

Liczbę rzeczywistą, to takie liczby zespolone, które w zapisie algebraicznym mają część urojoną równą zeru, a w zapisie wykładniczym argument, czyli kąt jest równy zero (liczby dodatnie) lub 180°, czyli π radianów (liczby ujemne).

Spróbuj wykonać działania na kilku liczbach rzeczywistych, przedstawionych w postaci liczb zespolonych, a przekonasz się, że wszystko się zgadza z naszymi dotychczasowymi doświadczeniami.

Jeśli w końcu trochę się zgubiłeś, i nie jesteś pewny, czy dobrze rozumiełeś zasady wykonywania obliczeń na liczbach zespolonych, nie zalamuj się. Ja chciałem ci tylko wytłumaczyć podstawy i rozszerzyć horyzonty. Przeczytaj jeszcze raz materiał z tego i poprzedniego mojego listu, a szczegóły wykonywania obliczeń znajdziesz w podręcznikach. Możesz też zwrócić się o pomoc do nauczyciela matematyki lub elektrotechniki.

Mam nadzieję, że teraz lepiej rozumiesz pojęcie liczby i pojęcie, dlaczego liczby zespolone doskonale nadają się do obliczeń związanych z opornością (impedancją).

Czy teraz wiesz, dlaczego wcześniej wychodziło nam, że reaktancja indukcyjna i pojemnościowa są „odwrotne”, czyli mają jakby przeciwny znak? Teraz chyba już wiesz, dlaczego „om, omowi nie równy”.

Przejrzyj jeszcze raz poprzednie listy i spróbuj poukładać sobie w głowie podane wiadomości. Jeśli jakaś sprawa nadal nie jest dla ciebie jasna, napisz do mnie.

Wykonaj też zadanie domowe. Będzie to sprawdzianem, czy rozumiełeś sprawę zastosowania liczb zespolonych do zapisu i obliczeń wartości impedancji. Niech to będzie także konkurs dla początkujących. Zadania konkursowe znajdziesz w ramce. Wśród osób, które nadesłają prawidłowe rozwiązania, zostaną rozlosowane nagrody-niespodzianki.

Ze względu na bardzo dużą ilość listów nadchodzących do redakcji, bardzo proszę, żebyś rozwiązanie nadesłał w kopercie z wyraźnym dopiskiem „LICZBY ZESPOLONE”.

Tyle na dziś.

Piotr Górecki

grafika: Małgorzata Zackiewicz

Ps. Za miesiąc nie będę cię męczył żadną teorią, napisz Ci coś o sprawach czysto praktycznych.

Zadania:

1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej następujące oporności: rezystancję $R = 10\Omega$, reaktancję pojemnościową $X_C = 10\Omega$ i reaktancję indukcyjną $X_L = 10\Omega$.
2. Zapisz w postaci liczby zespolonej wypadkową oporność szeregowego połączenia rezystora 10Ω i kondensatora, który dla pewnej częstotliwości ma reaktancję 10Ω ?
3. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz punkt odpowiadający tej liczbie.
4. Wyjaśnij w jednym zdaniu, lub posługując się wzorem matematycznym, dlaczego wypadkowa reaktancja obwodu szeregowego LC dla częstotliwości rezonansowej jest równa zeru.

Konkurs